Solución - Examen PyE - 15/12/2014

MO1	MO2	MO3	MO4
D	C	B	E

Problema 1 (6, 6, 6, 6, 6)

(1) X es suma de n VA de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p.
Luego, $X \sim Bin(n, p)$.

(2) Mediante un cálculo elemental, si $Y \sim Ber(p)$ entonces $E(Y) = p$ y $Var(Y) = p(1-p)$.
Luego, por la aditividad de la esperanza (y de la varianza bajo independencia) se tiene que $E(X) = np$ y $Var(X) = np(1-p)$.

(3) La probabilidad de tener todos los canales ocupados es $P(X = n) = \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 = p^n$.

(4) Por definición, la VA Y_t es de Bernoulli, con probabilidad de éxito $p(t)^n = \lambda^n e^{-nt}$.
Para $n = 5$ canales y en $t = 10$ tenemos que $Y_{10} \sim Ber(p')$, con $p' = \lambda^5 e^{-50}$.
El estimador $\hat{\lambda}$ para λ obtenido mediante el primer momento verifica $\overline{Y}_{10} = \hat{\lambda}^5 e^{-50}$.
Despejando tenemos que $\hat{\lambda} = \overline{Y}_{10}{}^{1/5} e^{10} = (6/10)^{1/5} e^{10}$.

(5) Asumiendo que $m = 10$ es grande, tomemos primeramente un IdeC aproximado para p'.
Tal intervalo está centrado en la proporción $\overline{Y}_{10}$, y tiene radio $\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{Y}_{10}(1-\overline{Y}_{10})}/\sqrt{n}$.
Tenemos así que $P(\overline{Y}_{10} - \epsilon \leq p' \leq \overline{Y}_{10} + \epsilon) \approx 1 - \alpha$. Aplicando la raíz quinta en cada miembro (y multiplicando por e^{10}) obtenemos el intervalo aproximado para λ a nivel α:

$$I_\alpha = [e^{10}(\overline{Y}_{10} - z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{Y}_{10}(1-\overline{Y}_{10})}/\sqrt{n})^{1/5}, e^{10}(\overline{Y}_{10} + z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{Y}_{10}(1-\overline{Y}_{10})}/\sqrt{n})^{1/5}]$$

Problema 2 (6, 6, 6, 6, 6)

(1) Utilizando $I_\alpha = [\bar{X}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1); \bar{X}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$
Tenemos $\bar{X}_n = 1973,3$; $s_n = 34$; $t_{0,025}(5) = 2,571$, el intervalo queda $[1938; 2009]$.

(2) Idem con $t_{0,05}(5) = 2,015$, el intervalo queda $[1945; 2001]$.

(3) Aplicamos el test de hipótesis
$H_0 : \ \mu = 2000$
$H_1 : \ \mu \neq 2000$
La región crítica para este test es $\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{s_n} \right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$
No se verifica la región crítica por lo que no se rechaza H_0.

(4) Sabemos que $\pi = 1 - \beta = P_{H_1}(rechazar\ H_0) = P(\mathcal{R}_\alpha | \mu = 2002) = 0,01$

(5) Aplicamos el test de hipótesis
$H_0 : \ \sigma = 32$
$H_1 : \ \sigma \neq 32$
La región crítica para este test es $\mathcal{R}_\alpha = \left\{ (n-1)\frac{s_n^2}{\sigma_0^2} \notin \left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right) \right\}$
No se verifica la región crítica por lo que no se rechaza H_0.

Múltiple Opción 1

Las variables aleatorias Y y Z son la misma. Luego, son idénticamente distribuidas, y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 2

Calculando las distintas probabilidades:
$P(1 + Z + Z^2 > 0) = 1$
$P(\phi(Z) < \frac{1}{2}) = P(Z < 0) = \frac{1}{2}$
$P(\frac{1}{2} < |Z - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}) = P(Z \in [0, 2]) = 0,4772$
$P(\frac{e^Z}{1+e^Z} > \frac{3}{4}) = P(Z > \log 3) = 0,1357$
Por tanto la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 3

Consideramos los sucesos:
$P = \{$"*una persona tiene la enfermedad*"$\}$
$N = \{$"*una persona no tiene la enfermedad*"$\}$
$DP = \{$"*una persona es diagnosticada positiva*"$\}$
$DN = \{$"*una persona es diagnosticada negativa*"$\}$
$DC = \{$"*una persona es diagnosticada correctamente*"$\}$
Tenemos que:
$P(DP|P) = 0,99$
$P(DN|N) = 0,9$
$P(DP) = 0,278$
$P(DP) = P(DP|P)P(P) + P(DP|N)P(N)$
$\Rightarrow 0,278 = 0,99P(P) + 0,1(1 - P(P)) \Rightarrow P(P) = 0,2 \Rightarrow P(N) = 0,8$
Entonces, $P(DC) = P(DP|P)P(P) + P(DN|N)P(N) = 0,918$
Por tanto, la probabilidad de que el resultado de correcto en ambos es $0,918^2$, opción C.

Múltiple Opción 4

$$\begin{aligned}
P(X > Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > Y|Y = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > k)P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_1)^k (1 - p_2)^{k-1} p_2 \\
&= (1 - p_1)p_2 \sum_{k=0}^{+\infty} ((1 - p_1)(1 - p_2))^k \\
&= \frac{p_2(1 - p_1)}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)},
\end{aligned}$$

por lo que la opción correcta es la E.