Examen - Probabilidad y Estadística

Lunes 15 de diciembre de 2014

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4

Cada pregunta múltiple opción correcta vale 10 puntos, mientras que una respuesta equivocada resta 2 puntos y no contestar puntea cero. Cada problema de desarrollo vale 30 puntos.
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema 1 (6, 6, 6, 6, 6)

Un sistema de comunicación se compone de n canales diferentes. Cada canal se puede ocupar independientemente, con probabilidad idéntica $p \in [0,1]$ pero desconocida. Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de canales ocupados. El sistema de comunicación permanece bloqueado cuando todos los canales están ocupados, es decir cuando ocurre el suceso $X = n$.

(1) Reconocer la ley de la variable aleatoria X.
(2) Hallar la esperanza y varianza de X, en función de n y p.
(3) Expresar la probabilidad de bloqueo p_b en función de n y p.
(4) Ahora la probabilidad de ocupación varía con el tiempo según $p(t) = \lambda e^{-t}$, donde t se mide en segundos, y X_t representa la cantidad de canales ocupados en el tiempo t. Sea Y la variable aleatoria que indica si hubo bloqueo o no en $t = 10$, es decir, $Y = 1$ si y solamente si $X_{10} = n$, o bien $Y = 0$ en caso contrario. Se considera la muestra i.i.d. de tamaño 10 para Y:

1	1	0	1	0	1	1	0	0	1

Estimar el parámetro λ utilizando el método de los momentos, sabiendo que el sistema se compone de $n = 5$ canales.

(5) Brindar un intervalo de confianza aproximado para λ a nivel $\alpha = 0,1$.

Problema 2 (6, 6, 6, 6, 6)

El fabricante de cierto tipo de baterías anuncia que éstas tienen una vida útil promedio de 2000 horas. De la observación de la vida útil de 6 baterías tomadas al azar se obtuvieron las siguientes vidas útiles:

2005, 1980, 1920, 2010, 1975, 1950.

Se supone que la duración de una batería tomada al azar está normalemente distribuida.

(1) Hallar un intervalo de confianza al 95% para la duración promedio de este tipo de baterías.
(2) Hallar un intervalo de confianza al 90% para la duración promedio de este tipo de baterías.
(3) Con los datos observados, ¿existe suficiente evidencia como para negar la afirmación del fabricante? Realizar una prueba de hipótesis al 5%.
(4) Si la verdadera duración promedio de las baterías fuera de 2002 horas, hallar la potencia de la prueba utilizada en la parte anterior.
(5) Realizar una prueba de hipótesis al 5% para saber ver si la desviación típica de la variable es de 32 horas. ¿qué se puede decir del p-valor de esta prueba? Dar una cota inferior y una superior.

Múltiple Opción 1

Sean $X_1, X_2, ..., X_{10}\, iid \sim Ber(p)$, y consideremos las variables $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $W = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Entonces:

A): Las variables Y y Z son independientes.
B): Las variables Z y W son independientes.
C): Las variables Z y W son idénticamente distribuidas.
D): Las variables Y y Z son idénticamente distribuidas.
E): La variable $Z + W$ tiene distribución de Bernoulli.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

Cierta prueba médica tiene una efectividad del 99% de acertar al diagnóstico en caso de que la persona examinada tenga la enfermedad y del 90% de acertar el diagnóstico en caso de que la persona no padezca la enfermedad. Si se le realiza la prueba a una persona elegida al azar, se sabe que la probabilidad de tener un diagnístico positivo es de $0,278$. Si se eligen dos personas de la población en forma independientemente, entonces la probabilidad de que el resultado les de correcto a ambas es:

A): $0,2050$.
B): $0,421362$.
C): $0,842724$.
D): $0,556$.
E): $0,077284$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 3

Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar y Φ su función de distribución. Entonces:

A): $P\{1/2 < |Z - 1/2| < 3/2\} < P\left\{\frac{e^Z}{1+e^Z} > 3/4\right\} < P\{\Phi(Z) < 1/2\} < P\left\{1 + Z + Z^2 > 0\right\}$.
B): $P\left\{\frac{e^Z}{1+e^Z} > 3/4\right\} < P\{1/2 < |Z - 1/2| < 3/2\} < P\{\Phi(Z) < 1/2\} < P\left\{1 + Z + Z^2 > 0\right\}$.
C): $P\{1/2 < |Z - 1/2| < 3/2\} < P\{\Phi(Z) < 1/2\} < P\left\{\frac{e^Z}{1+e^Z} > 3/4\right\} < P\left\{1 + Z + Z^2 > 0\right\}$.
D): $P\left\{\frac{e^Z}{1+e^Z} > 3/4\right\} < P\{\Phi(Z) < 1/2\} < P\{1/2 < |Z - 1/2| < 3/2\} < P\left\{1 + Z + Z^2 > 0\right\}$.
E): $P\left\{1 + Z + Z^2 > 0\right\} < P\left\{\frac{e^Z}{1+e^Z} > 3/4\right\} < P\{\Phi(Z) < 1/2\} < P\{1/2 < |Z - 1/2| < 3/2\}$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 4

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribuciones $\text{Geom}(p_1)$ y $\text{Geom}(p_2)$ respectivamente, con $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$ y recorrido común $\{1, 2, \ldots\}$. Entonces:

A): $P\{X > Y\} = \frac{p_2(1-p_1)}{1-p_1-p_2}$.
B): Si $p_1 = p_2 \Rightarrow P\{X > Y\} = 1/2$.
C): Si $p_1 < p_2 \Rightarrow P\{X > Y\} = 0$.
D): $P\{X \geq Y\} = \frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.
E): $P\{X > Y\} = \frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.