Examen - Probabilidad y Estadística

Lunes 4 de Febrero de 2013

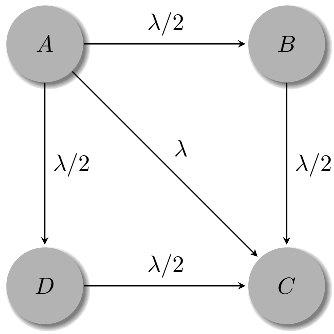
Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5

Cada pregunta múltiple opción correcta vale 8 puntos. Respuestas incorrectas restan 1,6 puntos.
Un total negativo en múltiple opción se considera de cero.
Rellenar con claridad en mayúscula la opción que considere correcta en las casillas superiores.
La duración total del examen es de 4 horas.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices, exclusivamente.

Problema 1 (20 puntos)

Se desea establecer comunicación entre los puntos A y C de la siguiente figura, donde cada segmento tiene un tiempo de vida exponencial independiente de parámetros indicados:



La comunicación entre A y C durará mientras exista algún camino dirigido desde A hacia C. Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo de conexión entre tales puntos.

(1) Probar que el tiempo de conexión de los caminos $A - D - C$ y $A - B - C$ son variables aleatorias exponenciales independientes, de parámetro λ.

(2) Calcular la distribución de la variable T.
Sugerencia: expresar T mediante máximos de variables aleatorias exponenciales.

(3) Estimar el parámetro λ utilizando la parte anterior, sabiendo que un 60% de las llamadas entre A y C duraron menos de 125 segundos.

(4) Hallar $E(T)$, la esperanza de T.

Problema 2 (20 puntos)

Una moneda perfecta se lanza 6 veces. Sea Y la cantidad de veces que se obtiene cara. La variable aleatoria X es el módulo de la diferencia entre el número de apariciones de la cara y el de apariciones de número en el experimento dado.

(1) Calcular el valor esperado de X. *Sugerencia: buscar una función g tal que $X = g(Y)$.*

(2) Calcular la varianza de X.

(3) Para determinar si es correcta la hipótesis de moneda justa, se llama ahora p a la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento. Construir un intervalo de confianza aproximado para p a nivel $\alpha = 0,1$, sabiendo que se consiguieron 51 veces cara de 100 lanzamientos independientes.

Problema 3 (20 puntos)
Sea la muestra:

4.09	0.83	4.93	6.75	2.12	5.22	6.01	0.31	0.62	4.64

(1) Realice dos pruebas de hipótesis para estudiar la aleatoriedad de la muestra.
(2) Realice una prueba de Kolmogorov-Smirnov para ver si es razonable afirmar que los datos provienen de la distribución. normal con media $\mu = 3$ y desvío $\sigma = 2$.
(3) Se dispone de una segunda muestra independiente de la anterior:

7.11	5.96	3.52	8.18	6.08	8.46	7.78	4.13	2.92	5.35

Realice una prueba de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras para decidir si las dos muestras tienen la misma distribución.

Nota: Para todas las pruebas de hipótesis considerar $\alpha = 0,10$.
Escriba claramente, en cada caso, el resultado de la prueba efectuada.

Múltiple Opción

Pregunta 1 Consideremos el promedio X_n de muestras independientes con densidad f_X:

$$f_X(x) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1 - x),$$

siempre que $0 < x < 1$, y $f_X(x) = 0$ en caso contrario. Entonces, el estimador $\hat{\theta}$ para θ obtenido por el método de los momentos es:

A): $\hat{\theta} = \overline{X_n}$
B): $\hat{\theta} = \frac{2\overline{X_n}}{1-\overline{X_n}}$
C): $\hat{\theta} = (\overline{X_n} - X_1)^2$
D): $\hat{\theta} = \frac{\overline{X_n}-1}{\overline{X_n}}$
E): $\hat{\theta} = \frac{2\overline{X_n}}{1+\overline{X_n}}$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Pregunta 2 Consideremos el promedio $\overline{X_n}$ de muestras $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. distribuidas normalmente, con media μ y varianza σ^2. Entonces:

A): $\overline{X_n}$ es estimador insesgado para μ, y por lo tanto $ECM(\overline{X_n}) = 0$.
B): $\overline{X_n}$ es estimador insesgado para μ y $ECM(\overline{X_n}) = \sigma^2$.
C): $\overline{X_n}$ no es estimador insesgado para μ puesto que $ECM(\overline{X_n}) = \sigma^2 + \mu^2 \neq 0$.
D): $\overline{X_n}$ es estimador insesgado para μ y $ECM(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
E): $\overline{X_n}$ no es estimador insesgado para μ, y $ECM(\overline{X_n}) = \sigma^2$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Pregunta 3 Se dispone de una muestra de variables i.i.d. $U_1, \ldots, U_n$ provenientes de la distribución Uniforme en $[0, 1]$. Se trata de generar, a partir de esta muestra, variables X_i con función de distribución $F(x) = 1 - 1/x$ para $x \geq 1$ y $F(x) = 0$ para $x < 1$:

A): Una posible transformación es: $X_i = 1 - 1/U_i$.
B): Una posible transformación es: $X_i = 1/(1 - U_i)$.
C): Una posible transformación es: $X_i = U_i/(1 - U_i)$.
D): Una posible transformación es: $X_i = 1/U_i - 1$.
E): Una posible transformación es: $X_i = (1 - U_i)/U_i$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Pregunta 4 Se dispone de una muestra de variables aleatorias $X_1, \ldots, X_{20}$ i.i.d. con distribución Bernoulli de parámetro p. Para decicir entre las hipótesis: $H_0 : p = 0,4$ y $H_1 : p = 0,6$. Se utiliza la región crítica $\left\{ \sum_{i=1}^{20} X_i > 12 \right\}$. La potencia de la prueba vale:

A): $\sum_{k=12}^{20} \binom{20}{k} (0,6)^k (0,4)^{20-k}$.
B): $\sum_{k=12}^{20} \binom{20}{k} (0,4)^k (0,6)^{20-k}$.
C): $\sum_{k=13}^{20} \binom{20}{k} (0,6)^k (0,4)^{20-k}$.
D): $\sum_{k=13}^{20} \binom{20}{k} (0,4)^k (0,6)^{20-k}$.
E): $\sum_{k=1}^{12} \binom{20}{k} (0,6)^k (0,4)^{20-k}$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Pregunta 5 Se tira una moneda hasta que salga cara. Sea X_1 el número necesario de tiradas para ello. Independientemente de esta moneda se tira otra y se le llama X_2 al número necesario de tiradas hasta que salga cara. Sea $Y = \max\{X_1, X_2\}$. La probabilidad $P\{Y \leq 3\}$ vale:
A): $(1/2)^3$.
B): $(1 - (1/2))^3$.
C): $(1 - (1/2)^2)^3$.
D): $(1/2)^6$.
E): $(1 - (1/2)^3)^2$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.