Examen - Probabilidad y Estadística

Lunes 16 de diciembre de 2013

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4

Cada pregunta múltiple opción correcta vale 10 puntos, mientras que una respuesta equivocada resta 2 puntos y no contestar puntea cero. Cada problema de desarrollo vale 30 puntos.
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema 1 (10, 10, 10)

Ana, José, Miguel y Patricia pertenecen a un grupo cerrado de usuarios de Facebook, donde solamente ellos pueden ser amigos entre sí. Todos son amigos, exceptuando Ana con Patricia, y José con Miguel. Para transmitir novedades, siguen un protocolo estricto de comunicación que se indica a continuación. El usuario que recibe la novedad deja pasar un día y lanza una moneda justa. En caso de obtener cara, envía inmediatamente el mensaje a uno de sus amigos, que elige con equiprobabilidad. En caso contrario repite el procedimiento (deja pasar otro día y lanza la moneda), hasta obtener cara y enviar el mensaje. Cada usuario que recibe un mensaje deja transcurrir un día y lanza una moneda justa, reenviando inmediatamente el mensaje al amigo distinto del emisor solamente si obtiene cara (en caso contrario deja pasar un día y sigue intentando hasta conseguir cara).

Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad total de días transcurridos desde que se recibe la novedad hasta que el mensaje llega a todos los usuarios del grupo.

(1) Hallar la función de probabilidad puntual de la variable X. Justificar.
(2) Ahora quien se entera de la novedad la envía (tras obtener cara) a sus dos amigos, y ellos siguen con el protocolo anterior. Sea Y la nueva variable aleatoria que cuenta la cantidad de días transcurridos desde que se recibe la novedad hasta que el mensaje llega a todos los usuarios del grupo. Expresar la variable Y en términos de mínimo de variables discretas conocidas. Justificar.
(3) Deseamos comparar ambos protocolos de comunicación. Hallar $E(X)$, $E(Y)$ y elegir el mejor protocolo, tomando en cuenta únicamente la cantidad de días transcurridos para que todo el grupo conozca la novedad.
Sugerencia: calcular $E(X)$ *y* $E(X-Y)$.

Problema 2 (8, 12, 10)

Se considera la siguiente muestra de temperaturas medias diarias de una semana de diciembre:

21,4	20,6	19,5	19,7	23,4	23,0	21,5

(1) Decidir, mediante la aplicación de DOS tests de hipótesis al nivel $\alpha = 0.05$, si es posible suponer que dicha muestra es *iid*.
(2) Decidir, mediante la aplicación de UN test de hipótesis al nivel $\alpha = 0.05$ si es posible suponer que dicha muestra se ajusta a una distribución normal cuyos parámetros se desconocen.
(3) Decidir, mediante la aplicación de UN test de hipótesis al nivel $\alpha = 0.05$ si es posible suponer que dicha muestra se ajusta a una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 20$, $\sigma^2 = 2$. Explicite qué puede concluir sobre la distribución de la muestra.

Múltiple Opción 1

Sean X, Y iid $\sim U[0,1]$, y denotemos mediante m_X y m_Y a sus respectivas medianas. Entonces, la variable $X+Y$, con mediana m_{X+Y}, verifica:

A): $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1$ y $Var(X+Y) = 1/2$.
B): $m_{X+Y} = m_X + m_Y = 1$ y $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1/2$
C): $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1/6$ y $m_{X+Y} = m_X + m_Y = 1$
D): $m_{X+Y} \neq m_X + m_Y$
E): $Var(X+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

Se dispone de una muestra $X_1, \ldots, X_n$ iid de variables Bernoulli de parámetro p desconocido, y se realiza el siguiente test de hipótesis simple $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p = p_1$, con $p_1 < p_0$. Sea R_{NP} la región de Neyman-Pearson y $\pi = 1 - \beta$ es su potencia al nivel α. Denotemos ϕ a la distribución normal estándar. Entonces:

A): $R_{NP} = \{\overline{X_n} > (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0+p_1}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}})$
B): $R_{NP} = \{\overline{X_n} > (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0-p_1}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}})$
C): $R_{NP} = \{\overline{X_n} > (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0+p_1}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}})$
D): $R_{NP} = \{\overline{X_n} < (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_1-p_0}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}})$
E): $R_{NP} = \{\overline{X_n} < (p_0 + p_1)/2\}$ y $\pi \approx \phi(\frac{p_0-p_1}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}})$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 3

Sean (X_n) sucesión i.i.d. de variables aleatorias uniformes en el intervalo $[a-1, a+1]$. Entonces:

A): $\overline{X}_n$ tiene sesgo $\frac{1}{n}$ para a, y $ECM(\overline{X_n}) = \frac{1}{\sqrt{3n}} + \frac{1}{n^2}$
B): $\overline{X}_n$ tiene sesgo $\frac{1}{n}$ para a, y $ECM(\overline{X_n}) = \frac{1}{3n} + \frac{1}{n^2}$
C): $\overline{X}_n$ es insesgada para a, y $ECM(\overline{X_n}) = \frac{1}{\sqrt{3n}}$
D): $\overline{X}_n$ es insesgada para a, y $ECM(\overline{X_n}) = \frac{a}{\sqrt{3n}}$
E): $\overline{X}_n$ es insesgada para a, y $ECM(\overline{X_n}) = \frac{1}{3n}$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 4

Sean $X, Y\ iid \sim Ber(p)$ y

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

La probabilidad de que $\mathbb{A}$ sea invertible es:

A): 0
B): $p^2 + (1-p)^2$
C): $\frac{1}{2}$
D): $1 - p^2$
E): 1
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.