Respuestas del examen de Probabilidad y Estadística 18/12/09

1. Ejercicio 1

   a) Sea DS es el suceso en que una lata presenta defectos de soldadura, y S_i, $i = 1,2$ que haya sido soldada en la soldadora i. Entonces

   $$P(DS) = P(DS \cap (S_1 \cup S_2)) = P((DS \cap S_1) \cup (DS \cap S_2)) = P(DS \cap S_1) + P(DS \cap S_2) =$$

   $$= P(DS|S_1)P(S_1) + P(DS|S_2)P(S_2) = 0,05 \times 0,7 + 0,2 \times 0,3 = 0,095$$

   b) Sea D es el suceso en que una lata tiene defectos, y DC que tenga defectos de cilindrado.

   $$P(D) = P(DS \cup DC) = P(DS) + P(DC) -$$

   $$= P(DS \cap DC) = P(DS) + P(DC) - P(DS)P(DC) = 0,095 + 0,4 - 0,095 \times 0,4 = 0,457$$

   c) $P(S_2|DS) = \dfrac{P(S_2 \cap DS)}{P(DS)} = \dfrac{P(DS|S_2)P(S_2)}{P(DS)} = 0,2 \times 0,3/0,095 = 12/19 \approx 0,6316$

   d) Una forma equivalente de plantear el problema es: se elige una soldadora al azar y luego, dos latas producidas por esa soldadora. Sea DS_i, $i = 1,2$ el suceso en que la lata i tiene defectos de soldadura, M_i, $i = 1,2$ que hayan sido soldadas en la soldadora S_i.

   $$P(DS_2|DS_1) =$$

   $$= \frac{P((DS_2 \cap DS_1 \cap M_1) \cup (DS_2 \cap DS_1 \cap M_2))}{P(DS)} =$$

   $$= \frac{P(DS_2 \cap DS_1 \cap M_1) + P(DS_2 \cap DS_1 \cap M_2)}{P(DS)} =$$

   $$= \frac{0,05^2 \times 0,7 + 0,2^2 \times 0,3}{0,095} = \frac{11}{76} \approx 0,1447$$

   e) $E(X) = 2$, por lo tanto, el valor esperado del número de latas que pasan por minuto es 2. Eso significa que puede salir por dos minutos y medio.

   f) La probabilidad de que pierda tres latas en dos minutos es igual a la probabilidad de que pierda 0 lata en el primer minuto y tres en el segundo, más la probabilidad de que pierda dos latas en el primer minuto y una en el segundo, más la probabilidad de que pierda una lata en el primer minuto y dos en el segundo, más la probabilidad de que pierda 3 latas en el primer minuto y ninguna en el segundo, es decir, $2e^{-4}\left(\frac{8}{6} + \frac{2^2 \times 2}{2}\right) = \frac{32e^{-4}}{3} \approx 0,1954$

2. *a*) $\int_1^a kx\,dx = k(a^2-1)/2 = 1$. Luego, $k = 2/(a^2-1)$.

b) $E(x) = \int_1^a kx^2\,dx = \dfrac{2(a^3-1)}{3(a^2-1)} = \dfrac{2(a^2+a+1)}{3(a+1)}$. (Se simplificó la raíz 1). Si $\overline{X}$ es el momento muestral de primer orden, entonces $\dfrac{2(\widehat{a}^2+\widehat{a}+1)}{3(\widehat{a}+1)} = \widehat{X}$, de donde

$$\widehat{a} = \frac{3\overline{X} - 2 \pm \sqrt{(3\overline{X}-2)^2 + 8(3\overline{X}-2)}}{4}$$

Las dos raíces tienen signos opuestos, eligiendo la raíz positiva, la respuesta es:

$$\widehat{a} = \frac{\sqrt{3\overline{X}-2}(\sqrt{3\overline{X}-2} + \sqrt{3\overline{X}+6})}{4}$$

c) $E(X^2) = \int_1^a kx^3\,dx = \dfrac{a^4-1}{2(a^2-1)} = \dfrac{a^2+1}{2}$. (Se simplificaron las raíces 1 y -1). Si M_2 es el momento muestral de segundo orden, entonces $\dfrac{a^2+1}{2} = M_2$, de donde $\widetilde{a} = \sqrt{2M_2 - 1}$.

d) La función de verosimilitud es $L_{\breve{a}}(\overrightarrow{x}) = 0$ si $\breve{a} < \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$, y $L_{\breve{a}}(\overrightarrow{x}) = \dfrac{2^n}{(\breve{a}^2-1)^n} \prod_{i=1}^n x_i$ si $\breve{a} \geq \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$. La función de verosimilitud es máxima tomando $\breve{a}$ lo menor posible siempre que $\breve{a} \geq \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$, o sea, $\breve{a} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

e) $P(X \leq 2) = \int_1^2 kx\,dx = \dfrac{3}{a^2-1}$. Igualando a $0,42$ que es el valor obtenido de la muestra, resulta $a^* = \sqrt{\dfrac{3}{0,42} + 1} = \dfrac{\sqrt{399}}{7} \approx 2,8536$.

3. *a*) El p-valor para el test de rachas es 0,4524, y para Spearman es 0,19, ambos mayores que 0,1, por lo que pasan el test.

   b) El estadístico de Kolmogorov-Smirnov es 0,24, con p-valor mayor que 0,2, también pasa el test.