Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2008
Examen, 24 de julio de 2008
Resumen de la solución

Ejercicio 1. Sean las variables aleatorias X e Y, cuya densidad conjunta es

$$f(x,y) = 2\,\varphi(x)\,\varphi(y), \quad \text{si} \;\; xy > 0$$

y $f(x,y) = 0$ en otro caso (donde $\varphi(t)$ es la densidad normal típica, i.e. $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$).

1. Si $t \leq 0$

$$P\{X \leq t\} = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dydx = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{0} 2\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dydx =$$
$$\int_{-\infty}^{t} 2\,\varphi(x)\,(1/2)dx = \Phi(t)$$

Si $t > 0$

$$P\{X > t\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dydx = \int_{t}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} 2\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dydx =$$
$$\int_{t}^{+\infty} 2\,\varphi(x)\,(1/2)dx = 1 - \Phi(t)$$

Por lo tanto X es normal y el cálculo es análogo para Y.

2.

$$P\{X \leq 0, Y > 0\} = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{+\infty} f(x,y)\,dydx = 0 \neq (1/2)(1/2) = P\{X \leq 0\}P\{Y > 0\}$$

Por lo tanto X e Y no son independientes.

3.

$$P\{Y \leq 1,5 | X > 1\} = \frac{P\{Y \leq 1,5, X > 1\}}{P\{X > 1\}}.$$

$$P\{Y \leq 1,5, X > 1\} = \int_{1}^{+\infty}\int_{0}^{1,5} 2\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dydx = 2(\Phi(1,5) - \Phi(0))(1 - \Phi(1))$$
$$P\{Y \leq 1,5 | X > 1\} = \frac{2(\Phi(1,5) - \Phi(0))(1 - \Phi(1))}{(1 - \Phi(1))} = 2(\Phi(1,5) - \Phi(0)).$$

Ejercicio 2.

1. $E(X) = \vartheta/3$.
2. Estimador: $\hat{\vartheta} = 3\overline{X}_n$. $E(\hat{\vartheta}) = \vartheta$.
3. $V(X) = \vartheta^2/18$
4. Estimador: $\overline{\vartheta} = \sqrt{18}\, s_n$.
5. $P\{X > 1\} = (1 - 1/\vartheta)^2$. Por lo tanto el estimador buscado es:

$$\vartheta' = \frac{1}{1 - \sqrt{0,62}}.$$

Ejercicio 3.

1. Hay 5 rachas y por lo tanto pasa la prueba de aleatoriedad.
2. No se rechaza aleatioriedad ya que $r_s = -0.4285714$ y por lo tanto el p-valor es aprox 0.210.
3. El estadstico de D‘Agostino es 0.2819834, por lo tanto no se rechaza la normalidad.
4. El estadstico de Lilliefors es 0.1571, por lo tanto no se rechaza la normalidad.
5. Se realiza el test de Kolmogorov para dos muestras y se obtiene D=0.2, o sea $mnD = 12 < 48$, por lo tanto no se rechaza que $F = G$.