IMERL
Probabilidad y Estadística
Solucion del Examen de Febrero 2008

Ejercicio 1

1. Al registrar el tiempo de llegada y finalización de 100 llamadas a B, se tienen 99 observaciones de la variable aleatoria exponencial de parmetro 0.25 que llamaremos V. Por lo tanto $\bar{V}_{99}$ es, por la ley fuerte de grandes nmeros, aproximadamente igual al valor esperado de V, que es $1/0.25 = 4$ minutos. La ley fuerte de grandes nmeros es aplicable pues la variable aleatoria exponencial cumple $E(|V|) < +\infty$.

2. Recuerde que si $T \sim exp(\lambda)$ y $x \geq 0$, entonces $P(T > x) = e^{-\lambda x}$. Entonces si $B_1, B_2, \ldots, B_{1000}$ son iid y representan los tiempos en que el teléfono de B permanece ocupado, tanto por llamadas de parcos como de charlatanes, se tiene que $P(B_1 > x) = P(B_1 > x|parco).P(parco) + P(B_1 > x|char)P(char)$ y esto es:

$$P(B_1 > x) = 0.8e^{-x} + 0.2e^{-0.1x}$$

De esto $f_{B_1}(x) = F'_{B_1}(x) = (1-P(B_1 > x))' = 0.8e^{-x}+0.2(0.1e^{-0.1x})$, esto es una combinación convexa de dos exponenciales. Se puede calcular $E(B_1) = \int_0^\infty x f_{B_1}(x)dx$ y se obtiene 2.8. De nuevo por LFGN, la duración promedio de una llamada es de 2 minutos y 48 segundos.

3. Aplicando el teorema de Bayes

$$P(charl| + 5) = \frac{P(+5|charl)P(charl)}{P(+5|charl)P(charl) + P(+5|parco)P(parco)}$$

donde +5 significa que la llamada dura ms de 5 minutos. Otra vez $P(T > x) = e^{-\lambda x}$ conduce a

$$\frac{e^{-0.5}0.2}{e^{-0.5}0.2 + e^{-5}0.8} = 0.957455$$

Ejercicio 2

1. Shapiro Wilk $W = \frac{b_n^2}{s_n^2} = \frac{3.5901^2}{13.205} = 0.976$ los coeficientes son $(0.5739, 0.3291, 0.2141, 0.1214, 0.0399)$ y las diferencias son $(3.9, 2.5, 2.0, 0.7, 0.4)$, el p-valor es 0.9425, no rechazamos normalidad.

D'Agostino

$$DA = \frac{32.55}{100 * \sqrt{13.205/10}} = 0.2832577,$$

por lo tanto el p-valor es mayor que 0.2, por lo que no rechazamos normalidad.

2. Test de la mediana: Si U es la indicatriz de que el dato sea mayor o igual a 21, entonces, $|\bar{U} - 0.5| = |6/10 - 0.5| = 0.1$. La región crítica es de la forma:

$$R = \{|\bar{U} - 0.5| \geq k\}$$

así que se debe hallar k para que $\alpha = 0.1$

Se busca el menor k tal que

$$0.1 \geq P(|bin(10, 0.5)/10 - 0.5| \geq k)$$

equivalentemente

$$P(5 - 10k < bin(10, 0.5) < 5 + 10k) \geq 0.9$$

Al ensayar valores de k en $\{0.1, 0.2, ...\}$, se genera una tabla $P(bin(10, 0.5) = 5)$, $P(bin(10, 0.5) \in \{4, 5, 6\})$, $P(bin(10, 0.5) \in \{3, 4, 5, 6, 7\})$ hasta que la suma sea mayor o igual a 0.9. Esto ocurre con $k = 0.4$, como $0.1 \geq 0.4$ es falso, no se rechaza la hipótesis nula de que la mediana es 21.

3. Ya que no se rechaza la normalidad, $P(T > 21.5) = 1 - P(T \leq 21.5) \doteq 1 - \Phi(\frac{21.5-21.05}{1.211289}) = 0.3551307$. Donde 21.05 es el promedio de los datos y 1.211289 es la desviación típica $\sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Ejercicio 3 1. Durante el examen se dijo que $X = 100$ significa que en el centésimo intento se pudo extraer el mineral o que no se pudo. Lo que es compatible con la restricción presupuestal. Por lo tanto el recorrido de X es $\{1, 2, \ldots, 100\}$

Se tiene que $P(X = k) = (0.7)^{k-1}(0.3)$ si $k \in \{1, 2, \ldots, 99\}$ y $P(X = 100) = \sum_{k=100}^{\infty}(0.7)^{k-1}(0.3) = (0.7)^{99}$

2. $P(X > 4) = 0.7^4 = 0.2401$

3.

$$EX = \left(\sum_{i=1}^{99} i(0.3)0.7^i\right) + 100 \times 0.7^{100}.$$

Usando que

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + px^{p-1} = \frac{-(p+1)x^p(1-x) + (1 - x^{p+1})}{(1-x)^2}$$

tenemos:

$$EX = 0.3{\times}0.7\frac{-(100+1)0.7^{100}(1-0.7)+(1-0.7^{100+1})}{(1-0.7)^2}{+}100{\times}0.7^{100} = .$$

usando esto

$$EX = 0.3\frac{-100(0.3)0.7^{99}+(1-0.7^{100})}{(1-0.7)^2} + 100(0.7^{99}) = 3.33333$$