N^o de Prueba	Cédula	Apellido y Nombre	Salón

Ejercicio 1. (33 puntos) Una urna contiene 15 bolas de colores, de las cuales: 4 son rojas, 5 azules y 6 verdes. Se realizan cuatro extracciones con reposición y se llama X al número de colores obtenidos al cabo de esas cuatro extracciones. Claramente, la variable aleatoria X puede tomar solamente los valores 1,2 y 3.

1. Calcular $P\{X = 1\}$.
2. Calcular $P\{X = 3\}$.
3. Usando las partes anteriores, calcular $P\{X = 2\}$.
4. Calcular la probabilidad condicional de que en la tercera extracción ya se hayan obtenido los tres colores, dado que $X = 3$.
5. Supongamos ahora que las extracciones se hacen sin reposición y sea Y el número de colores obtenidos al cabo de esas cuatro extracciones. Calcular $P\{Y = 1\}$ y $P\{Y = 3\}$.

Ejercicio 2. (33 puntos) Sean las muestras variables aleatorias independientes $X_i \sim Bin(n, p_1)$ e $Y_i \sim Ber(p_2)$ (para cada i: X_i independiente de Y_i) donde n y p_2 son conocidos y donde $1 \leq i \leq m$. A partir de ellas definimos la variables aleatorias $Z_i = X_i Y_i$.

1. Calcular $E(Z_i)$.
2. Supongamos que, de la muestra $Z_1, Z_2, \cdots; Z_m$ se conoce solamente el dato $\sum_{i=1}^{m} Z_i$, dar, en función de m, n y p_2, un estimador de p_1.
3. Calcular $P\{Z_i = 0\}$.
4. Supongamos que, de la muestra Z se conoce solamente el dato $\sum_{i=1}^{m} 1_{\{Z_i=0\}}$ (es decir, se sabe cuántos ceros hay en la muestra) dar, en función de m, n y p_2, un estimador de p_1.

Ejercicio 3. (34 puntos) Se dispone de la siguiente muestra:

2,90 1,04 6,63 15,15 3,11 4,13 3,89 1,65 2,90 1,21

1. Realizar dos pruebas de aleatoriedad al nivel 0,1 para estudiar si es razonable afirmar que los datos son i.i.d.
2. Realizar una prueba de D'agostino al nivel 0,1 para estudiar si es razonable afirmar que los datos son normales.
3. Realizar una prueba de Kolmogorov y Smirnov al nivel 0,1 para estudiar si es razonable afirmar que los datos tienen distribución $F(x) = 1 - 1/x$ para $x > 1$ y $F(x) = 0$ en otro caso.

Soluciones Examen Probabilidad y Estadística **Dic. 08**

Facultad de Ingeniería – Instituto de Matemática - UDELAR

Ejercicio 1

1)

P(X = 1) = P(4 rojas) + P(4 azules) + P(4 verdes) =
$(4 / 15)^4 + (5 / 15)^4 + (6 / 15)^5 = 2177 / 50625 = 0,043$

2) Hay $C_2^4 = 6$ configuraciones de salida de dos bolas de colores repetidos.
Para cada una de estas hay dos configuraciones de disposición de salidas de los otros dos colores (distintos). Entonces:

P(X=3) = $6.2[(4/15)^2.(5/15).(6/15) + (5/15)^2.(4/15).(6/15) + (6/15)^2.(5/15).(4/15)] =$
$96 / 15^2 = 32 / 75 = 0,4267$

3) **P (X = 2)** = 1 – P(X = 1) – P (X = 3) = 1 – 0.043 – 0.4267 = 0,5303

4) Si llamamos D al suceso, tenemos :

P (D | X=3) = P(D) / P(X=3) = P(D ∩ {X=3}) / P(X=3) = P(D) / P(X=3)

P(D) = $6.(4/14)(5/15)(6/15) = 48 / 15^2$

P (D | X=3) = $48/15^2 \; / \; 96/15^2 = 48 / 96 = 1 / 2$

5)

P(Y=1) = P(4 rojas) + P(4 azules) + P(4 verdes) =
(4/15)(3/14)(2/13)(1/12) +(5/15)(4/14)(3/13)(2/12) +(6/15)(5/14)(4/13)(3/12) =
(24+120+360) /15.14.13.12 = 504 / 15.14.13.12 = 1 / 65

P(Y=3) = P (2 rojas, 1 azul , una verde) + P(2 verdes, 1 roja, 1 azul) +
P(2 azules, 1 roja, 1 verde)

P (2 rojas, 1 azul , una verde) : 6 son las configuraciones de salida de las posiciones de las dos rojas , 2 son las posibilidades de los otros 2 colores. Estas 6.2 = 12 configuraciones tienen todas la misma probabilidad:
4.3.5.6 / 15.14.13.12

P(2 verdes, 1 roja, 1 azul) = 12.(6.5.4.5 /15.14.13.12)

P(2 azules, 1 roja, 1 verde) = 12.(5.4.4.6 /15.14.13.12)

Finalmente:

P(Y=3) = (2.6 + 4.5 + 4.4) / 7.13 = 48 / 91 = 0.5275

Ejercicio 2

1) Por independencia : $E(Z_i) = E(X_iY_i) = E(X_i)E(Y_i) = np_1p_2$

2) $E(Z_i) = np_1p_2$. Por tanto un estimador de p_1 es:

$$\hat{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} Z_i}{mnp_2}$$

3) **P(Z_i = 0)** = $P(X_iY_i) = 0$.

Entonces **:**

$$P(Z_i = 0) = P(\{X_i = 0\} \cup \{Y_i = 0\}) = P(X_i=0) + P(Y_i=0) - P(X_i=0).P(Y_i=0) =$$
$$(1-p_1)^n + (1-p_2) - (1-p_1)^n(1-p_2) = (1-p_1)^n p_2 + (1-p_2)$$

4) $E(1_{\{Z_i=0\}}) = P(Z_i) = (1-p_1)^n p_2 + (1-p_2)$

Si llamamos

$$p' = \left(\sum_{i=1}^{m} 1_{\{z_i=0\}}\right) / m$$

tenemos que p' es un estimador de $(1-p_1)^n p_2 + (1-p_2)$

Despejando obtenemos el estimador de p_1:

$$p_1' = 1 - ((p'+p_2-1)/ p_2)^{1/n} p_2$$

Ejercicio 3

a) Test de Rachas: n = 10   0, 1 1 , 0 , 1 , 0 0 , 1 , 0   R = 7 rachas
No rechazo aleatoriedad

Test de Spearman:

Muestra:	2.9	1.04	6.63	15.15	3.11	4.13	3.89	1.65	2.9	1.21
Ordenada:	1.04	1.21	1.65	2.9	2.9	3.11	3.89	4.13	6.63	15.15
Vector de rangos:	4	1	9	10	6	8	7	3	5	2

Suma de $(r(i) - i)^2$ = 9 + 1 + 36 + 36 + 1 + 4 + 0 + 25 + 16 + 64 = 192

Coef. de Spearman : r_S = 1 – 6*192/10*99 = 1 – 1152/990 = -0.1636

P valor = 0.328 > 0.1 , entonces no rechazo aleatoriedad

b) $\bar{x}$ = 4.261 ; σ_{10} = 3.948 ;

Vector i – 11/2 =	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
Ordenada:	1.04	1.21	1.65	2.9	2.9	3.11	3.89	4.13	6.63	15.15
Productos :	-4.68	-4.235	-4.125	-4.35	-1.45	1.55	5.835	10.325	23.205	68.175

Suma de Productos = 90.255
Coef de D'Agostino = 90.255 / 100*3.948 = 0.22861
No pertenece al intervalo [0.2573 , 0.2843]
Por tanto rechazamos la hipótesis de normalidad de la muestra

c) $F(x) = 1 - 1/x$ si $x > 1$, 0 en otro caso

i	X ordenada	F. emp en X^*_{i-}	F. emp en X^*_{i+}	$F(X^*_i)$	Dif en Valor abs	Dif en Valor abs
1	1.04	0	0.1	0.0385	0.0385	0.0615
2	1.21	0.1	0.2	0.1736	0.0736	0.0264
3	1.65	0.2	0.3	0.3939	0.1939	0.0939
4	2.9	0.3	0.4	0.6552	0.3552 *	0.2552
5	2.9	0.4	0.5	0.6552	0.2552	0.1552
6	3.11	0.5	0.6	0.6785	0.1785	0.0785
7	3.89	0.6	0.7	0.7429	0.1429	0.0429
8	4.13	0.7	0.8	0.7579	0.0579	0.0421
9	6.63	0.8	0.9	0.8492	0.0492	0.0508
10	15.15	0.9	1.0	0.934	0.034	0.066

Estimador = 0.3552 ; con un nivel de 0.1 el valor de Tabla para n = 10 vale 0.368
Como el estimador dio más chico entonces NO rechazamos la hipótesis de que la F sea la función de distribución asociada a las variables muestrales.