PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - Facultad de Ingeniería

Examen 28 de Julio de 2007

Nombre y Apellido	Cédula

Para uso docente

1a	1b	1c	1d	1e	Total **1**	2a	2b	2c	Total **2**	3a	3b	3c	Total 3	**Total**

La duración del examen es de 4 horas.

El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

Publicación de resultados: viernes **10 de Agosto hora 20:00.**

Muestra de exámenes lunes 13 de Agosto hora 14:00.

1. **(35 puntos)**
   Sea X una variable aleatoria discreta tal que $R_X = \{-1, 2\}$ y su función de probabilidad

$$p_X(x) = p^{\left(\frac{2-x}{3}\right)}(1-p)^{\left(\frac{1+x}{3}\right)} \; \forall\, x \in R_X \quad \text{con } 0 \leq p \leq 1$$

   (a) Determine $\widehat{p}_n$ estimador de p aplicando el método de los momentos.

   (b) Demuestre que aplicando el método de máxima verosimilitud se obtienen el mismo estimador.

   (c) Determine si el estimador hallado es insesgado.

   (d) Calcule el error cuadrático medio (ECM) de $\widehat{p}_n$.
   (Recordar que si T_n es un estimador de θ entonces $ECM[T_n] = E\left[(T_n - \theta)^2\right]$)

   (e) En una muestra $X_1, X_2, ..., X_{120}$ iid se obtuvo 40 veces el valor -1 y 80 veces el valor 2. Determine un intervalo de confianza aproximado al 90% para p .

2. **(30 puntos)**

   Se tiene la siguiente muestra correspondiente a los errores por falta de sincronización en los relojes entre dos computadoras.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1,9284	1,5076	0,5176	0,6642	1,4644	1,5098	0,991

   (a) Estudie la aleatoriedad de la muestra (realice 2 pruebas).

(b) Indique si puede suponerse que los datos se distribuyen uniformemente en el intervalo [0, 2] (realice una prueba).

(c) Se instala un software para mejorar la sincronización y se obtiene la siguiente nueva muestra.

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
1,1596	1,5208	1,0596	1,281	0,4182	0,7596	1,5666	1,3616

Suponiendo que la nueva muestra es aleatoria indique si ambas tienen la misma distribución mediante pruebas de comparación de dos muestras (realizar dos pruebas)

En este ejercicio trabaje con el p-valor $\boldsymbol{\alpha^*= 0,1}$

3. **(35 puntos)**

Se tiene un sistema de comunicación que consiste en un emisor, un canal de transmisión y un receptor.

El emisor emite una señal codificada con un bit (0 ó 1). Llamaremos p_0 a la probabilidad de emitir un 0 (por lo tanto $1 - p_0$ es la probabilidad de emitir un 1). Se le asigna un voltaje μ_0 al bit 0 y un voltaje μ_1 al bit 1.

Al transmitir el canal agrega ruido de modo que el voltaje recibido por el receptor se modela como una variable aleatoria U , de forma que $U \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ si corresponde al bit 0 y $U \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ si corresponde al bit 1 ($\mu_0 < \mu_1$).

El receptor desea distinguir las señales, para esto establece un umbral c para el voltaje U recibido de modo que si U es mayor a c decodifica un 1 y si U es menor o igual que c decodifica un 0.

(a) Suponiendo conocidos μ_0, μ_1, y σ, calcule la probabilidad de error en función de c.
Sugerencia: Deje el resultado planteado en términos de la función de distribución Φ de una variable aleatoria con distibución normal estándar.

(b) Demuestre que la probabilidad calculada es mínima si el umbral c toma el valor óptimo

$$c_{opt} = \frac{2\sigma^2 \ln\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right) + \mu_1^2 - {\mu_0}^2}{2(\mu_1 - \mu_0)} \quad .$$

(c) Supongamos $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 2$, y $\sigma = 1$

i. Muestre que $P(U \leq 1,20) \simeq 0,67p_0 + 0,21$

ii. Se obtiene la siguiente muestra $U_1, ..., U_9$ iid del voltaje en la recepción:

0,20 0,92 0,90 1,10 1,70 1,80 2,20 0,30 1,11

Para tomar una decisión se plantea el siguiente test:

$$\begin{cases} Ho: p_0 = 0,61 \\ H_1: p_0 = 0,30 \end{cases}$$

con región crítica $R = \{card\{i : U_i \leq 1,20\} \geq 5\}$

Determine qué decisión se debe tomar y calcule la probabilidad del error asociado a dicha decisión.

En este ejercicio haga los cálculos con dos dígitos después de la coma.