PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
EXAMEN FEBRERO 2007

DATOS DEL ESTUDIANTE

Nº de Examen	Nombre y Apellido	Cédula	Firma

- La duración del examen es de: **4 horas.**
- **El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.**
- Publicación de resultados: **1º de marzo a las 12 horas.**
- Muestra de exámenes: **2 de marzo a las 16 horas.**

Problema 1 (35 puntos)

Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos v.a.i.i.d. con distribución geométrica Geo(p). Sean $\mathbf{U} = \min\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$; $\mathbf{V} = \max\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$; es claro que $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$.

1. **(8 puntos)**
   a) Hallar $\mathbf{P}(\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k)$
   b) Siendo $r > 0$, hallar $\mathbf{P}(\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k + r)$

2. **(9 puntos)** Hallar $\mathbf{P}(\mathbf{U} = k) = \mathbf{P}(\bigcup_{r=0}^{\infty} \left\{\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k + r\right\})$. (Se recuerda que $\sum_{i=1}^{n-1} r^i = r\dfrac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$).

3. **(9 puntos)**
   a) Hallar $\mathbf{P}(\mathbf{V} - \mathbf{U} = 0) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k\right\}\right)$.
   b) Hallar $\mathbf{P}(\mathbf{V} - \mathbf{U} = r) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k + r\right\}\right)$.

4. **(9 puntos)** ¿Son independientes $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V} - \mathbf{U}$? Justificar la respuesta.

PARA USO DOCENTE

1.1	1.2	1.3	1.4	**Total 1**	2.1	2.2	2.3	**Total 2**

3.1	3.2	3.3	3.4	**Total 3**	**Total examen**

Problema 2 (35 puntos)

En cada uno de los ítems de este problema es suficiente realizar un solo test. Los datos de la tabla representan valores de ensayos a la tracción en kg/mm^2 de 5 muestras de la partida A y 3 de la partida B de barras de acero al carbono. Se asumirá que la dispersión de ambas muestras es la misma.

Partida A	72.4	72.3	69.9	70.7	70.3
Partida B	71.6	73.5	70.8		

1. **(8 puntos)** Determinar si los datos de la muestra de la partida A pueden considerarse iid.
2. **(9 puntos)** ¿Puede considerarse que las muestras de la partida A tienen distribución normal? (Sugerencia: usar Shapiro-Wilks.)
3. **(9 puntos)** Testear si se puede afirmar que tienen igual distribución.
4. **(9 puntos)** Si F es la distribución de la muestra A y G la de la muestra B, testear $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \theta = 0 \\ \mathrm{H}_1 : \theta > 0 \end{cases}$ con el modelo $G(x) = F(x + \theta)$.

Problema 3 (30 puntos)

1. **(9 puntos)** Sea un conjunto de n reales *distintos* Dicho conjunto se ordena así: primero, se coloca el menor de ellos en la posición $n-1$. De los restantes $n-1$ números, se toma uno de ellos al azar, y se coloca en la posición n. Finalmente, los restantes $n-2$ números se ordenan de mayor a menor, y se colocan respectivamente en las posiciones 1, 2,...,$n-2$. Contar de cuántas maneras se puede llevar a cabo esta forma de ordenar los números.
2. **(12 puntos)** Sean X_1, X_2,... una sucesión de variables aleatorias continuas iid. De aquí en adelante, supondremos que los valores que toman las variables aleatorias son todos diferentes. A partir de dicha sucesión, se define una nueva variable aleatoria N_1 que cuenta los primeros elementos en racha descendente más una unidad; en otras palabras, si

   $$X_1 > X_2 > \ldots > X_{j-1} < X_j$$

   (donde en la secuencia anterior hay $j-1$ elementos en racha descendente), resulta $N_1 = j$. Probar que $\mathrm{P}(N_1 = n) = (n-1)/n!$; hallar $\mathrm{E}(N_1)$ y $\mathrm{Var}(N_1)$. (Se podrá admitir que $\sum_{j=0}^{\infty} 1/j! = e$ y que $\mathrm{E}(N_1^2) = 3e$; se sugiere recordar 1.)
3. **(9 puntos)** Habiendo definido N_1 según 2., se define en forma análoga N_2 como el primer entero tal que $X_{N_1+1} > X_{N_1+2} > \ldots > X_{N_1+N_2-1} < X_{N_1+N_2}$ y en general N_j como el primer entero tal que $X_{N_{j-1}+1} > X_{N_{j-1}+2} > \ldots > X_{N_{j-1}+N_j-1} < X_{N_{j-1}+N_j}$. Sea r un natural fijo, hallar $\mathrm{E}(N_1 + \ldots + N_r)$ y $\mathrm{Var}(N_1 + \ldots + N_r)$.