PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SOLUCIÓN EXAMEN FEBRERO 2007

Problema 1

1. *a)* $\mathbf{P}(\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k) = \mathbf{P}(\mathbf{X} = k \bigcap \mathbf{Y} = k) = p^2(1-p)^{2k-2}$.

   b) Si $r > 0$, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k + r) = \mathbf{P}(\mathbf{X} = k \bigcap \mathbf{Y} = k + r) + \mathbf{P}(\mathbf{X} = k + r \bigcap \mathbf{Y} = k) = 2p^2(1-p)^{2k+r-2}$.

2. $\mathbf{P}(\mathbf{U} = k) = \mathbf{P}(\bigcup_{r=0}^{\infty} \left\{\{\mathbf{U} = k\} \bigcap \{\mathbf{V} = k + r\}\right\}) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\{\mathbf{U} = k\} \bigcap \{\mathbf{V} = k + r\}\right\} = p^2(1-p)^{2k-2} + \sum_{r=1}^{\infty} 2p^2(1-p)^{2k+r-2} = p^2(1-p)^{2k-2} + 2p^2(1-p)^{2k-2}\sum_{r=1}^{\infty}(1-p)^r = p^2(1-p)^{2k-2} + 2p(1-p)^{2k-1} = (1-p)^{2k-2}p(2-p)$.

3. $\mathbf{P}\{\mathbf{V} - \mathbf{U} = r\} =$

$$= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\{\mathbf{U} = k\} \bigcap \{\mathbf{V} = k + r\}\right\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\{\mathbf{U} = k\} \bigcap \{\mathbf{V} = k + r\}\right\}\right)$$

   a) Si $r = 0$, resulta $\mathbf{P}\{\mathbf{V} - \mathbf{U} = r\} = \sum_{k=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2k-2} = p^2(1-p)^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k} = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$.

   b) Si $r > 0$, resulta $\mathbf{P}\{\mathbf{V} - \mathbf{U} = r\} = 2p^2(1-p)^{r-2}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k} = 2p^2(1-p)^r \dfrac{1}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^r}{2-p}$.

4. Es inmediato verificar que $\mathbf{P}(\mathbf{U} = k \bigcap \mathbf{V} = k + r) = \mathbf{P}(\mathbf{U} = k)\mathbf{P}(\mathbf{V} = k + r)$ para $k = 1, 2, \ldots$ y $r = 0, 1, \ldots$, por lo que las variables aleatorias son independientes.

Problema 2

1. Pasa rachas con R=3 y p-valor 0.75. Pasa Spearman con $R_S = -0,7$ y p-valor $0,117$.

2. Pasa Shapiro-Wilks. Se tiene $a_1 = 0,6646$ y $a_2 = 0,2413$, de donde $b_n = 2,1441$. El promedio muestral es $71,12$ y la suma de los cuadrados de los datos es $25295,64$, de donde $s_n^2 = \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2/n = 5,368$. El estadístico es $W = s_n^2/b_n^2 = 0{,}8564$ y el p-valor es menor que $0,01$. Las tablas que disponemos del test de D'Agostino empiezan con tamaño de la muestra 10, mayor que los 5 datos disponibles.

3. Como el tamaño de las muestras es pequeño, usamos Kolmogorov-Smirnov de comparación de dos muestras. Resulta $D_{5,3} = 0{,}6$; el p-valor es mayor que $0,143$, se acepta igual distribución.

4. Como la muestra es pequeña, dadas las tablas que disponemos, se usa Mann-Whitney-Wilcoxon (para los otros test se tienen aproximaciones asintóticas). No es necesario rescalar los datos porque estamos trabajando bajo la hipótesis de que las dispersiones son iguales. La suma de los rangos T_B de la muestra B (que es la más pequeña) es 17. La suma de los rangos de A es 19. Como $T_B > m\frac{m+n+1}{2} = 13{,}5$, se testea $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \theta = 0 \\ \mathrm{H}_1 : \theta > 0 \end{cases}$ con el modelo $G(x) = F(x+\theta)$ con $\theta > 0$. Se obtiene que el p-valor es 0,196. Se acepta la hipótesis nula.

Problema 3

1. El primer paso se puede realizar de una única manera, el segundo de $n-1$ formas, el tercero de una única manera, luego el número total de formas de ordenar los n números en $n-1$.

2. $\mathrm{P}(N_1 = n) =$ casos favorables/casos posibles $= (n-1)/n!$. $\mathrm{E}(N_1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)/n! = e$. $\mathrm{Var}(N_1) = E(N_1^2) - (E(N_1))^2 = 3e - e^2$.

3. $\mathrm{E}(N_1 + \ldots + N_r) = re$. Por la independencia de las X_1 se deduce la independencia de las N_i, de donde $\mathrm{Var}(N_1 + \ldots + N_r) = r(3e - e^2)$.