EXAMEN DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 22/12/06

No. de Examen	Nombre y Apellido	Cédula	Firma

- La duración del examen es de: **4 horas.**
- **El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.**
- Publicación de resultados: 27/12/06 hora 20:00
- Muestra del examen: 28/12/06 hora 18:00

Problema 1 (30 puntos)

Un cierto sistema (el cual debe funcionar las 24 hs. del día, todos los días) depende para su funcionamiento de dos componentes clave, cuyos tiempos de vida **medido en horas** (esto es, **cuántas horas transcurren desde que la componente es instalada hasta que se rompe**), son variables aleatorias independientes, $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$, con $\lambda_1 = 1/300$, $\lambda_2 = 1/350$. Si cualquiera de estas dos componentes se rompe, el sistema se cae.

1. **(6 puntos)** El fabricante de la componente X_1 desea garantizar que la duración de dicha componente es por lo menos T horas con una probabilidad de 0.9. Hallar el mayor valor de T.
2. **(8 puntos)** Calcule la probabilidad de que el sistema funcione continuamente al menos durante una semana.
3. **(7 puntos)** Calcule la probabilidad de que el sistema se caiga a lo sumo en una de cuatro semanas elegidas al azar.
4. **(9 puntos)** Se desea colocar respaldos a esas dos componentes, de modo que si una de ellas falla, el respaldo se hace cargo al instante y el sistema no se cae. Sea N_1 la cantidad de roturas de la componente 1 en 630 horas, es una variable aleatoria con distribución de Poisson $\mathcal{P}(21/10)$. Sea N_2 la cantidad de roturas de la componente 1 en 630 horas, es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(9/5)$.

   Se decide colocar una cantidad n de respaldos, el mismo para ambas componentes. ¿Cuál es el mínimo valor de n tal que la probabilidad de que el sistema no falle en 630 horas sea de al menos 0.99? (Se sugiere probar con algunos valores de n hasta encontrarlo)

PARA USO DOCENTE

1.1	1.2	1.3	1.4	**Total 1**	2.1(a)	2.1(b)	2.1(c)	2.2(a)	2.2(b)	**Total 2**

3.1	3.2	3.3	3.4	**Total 3**	**Total**

Problema 2 (30 puntos)

Los estudiantes de de una institución de enseñanza terciaria tienen tres orígenes: Montevideo, Interior y Exterior. Los estudiantes de Montevideo y los del Exterior son el doble y la tercera parte respectivamente que los del Interior. El 30 % de los estudiantes proviene de liceos privados. El 12 % de los estudiantes proviene de liceos privados del Interior. El 4 % proviene de liceos públicos del Exterior.

1. Se elige un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de :
   a) **(4 puntos)** El estudiante provenga de un liceo privado si es del Interior.
   b) **(5 puntos)** El estudiante provenga de un liceo privado, sabiendo que viene de Montevideo.
   c) **(5 puntos)** El estudiante provenga del exterior, sabiendo que viene de un liceo privado.
2. De los 50 estudiantes con que cuenta la institución, se sortean 10.
   a) **(8 puntos)** Calcule la probabilidad de que exactamente 8 provengan de liceos privados.
   b) **(8 puntos)** Calcule la probabilidad de que por lo menos 2 de esos 10 estudiantes provengan de liceos privados del Exterior.

Problema 3 (40 puntos)

En un consultorio médico se decide estudiar el flujo de pacientes que llegan a hacerse cierto análisis; si llegan 4 o más pacientes por hora, se debe incrementar su equipo de laboratorio. Por su experiencia, la recepcionista que toma los datos a los pacientes cuando llegan estima que llegan en promedio unos tres pacientes por hora.

1. **(8 puntos)** Se pide a la recepcionista que registre el número de pacientes que llegan durante 5 horas elegidas al azar, y resultan ser $X_1 = 6$; $X_2 = 4$; $X_3 = 0$; $X_4 = 2$; $X_5 = 3$. ¿Es razonable suponer que estos datos están distribuidos en forma independiente? (Hacer un solo test.)
2. **(10 puntos)** Si el laboratorio quisiera testear la hipótesis nula que los datos obtenidos corresponden a una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3$ sobre la base de los datos anteriores, ¿cuál sería su conclusión?
3. **(10 puntos)** El laboratorio acepta que es una distribución de Poisson, pero quiere tener más certeza sobre el valor del parámetro. Con los datos de la parte 1., el laboratorio decide testear si tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis que llegan 4 pacientes por hora frente a la alternativa que llegan menos:

   $$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \lambda = 4 \\ \mathrm{H}_1 : \lambda < 4 \end{cases} \quad \text{con región de rechazo } \mathcal{R} = \{\textstyle\sum_{i=1}^{5} X_i \leq c\}$$

   ¿cuál es la decisión? (Sugerencia: si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ son independientes entonces $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$)
4. **(12 puntos)** Sea ahora la prueba de hipótesis: $\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \lambda = 4 \\ \mathrm{H}_1 : \lambda = 3{,}6 \end{cases}$

   Hallar la cantidad mínima de horas en la que hay que relevar el número de pacientes que llegan a ser atendidos para que $\alpha = \beta = 10\,\%$.