EXAMEN DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 22/12/06

Problema 1

1. $P(X_1 > T) = e^{-T/300} \geq 0{,}9 \Rightarrow T \leq -300 \log 0{,}9 \approx 31{,}6$ horas.

2. La probabilidad que la componente 1 funcione más de una semana es $P(X_1 > 168) = e^{-168/300}$; análogamente, para la componente 2 es $P(X_2 > 168) = e^{-168/350}$. La probabilidad que ambos duren más de una semana es $p = P(X_1 > 168)P(X_2 > 168) = e^{-168(1/300+1/350)} \approx 0{,}35$.

3. Es una distribución binomial, la probabilidad que el sistema caiga a lo sumo durante una semana es $p^4 + 4(1-p)p^3 \approx 0{,}13$.

4. La variable aleatoria N_1: cantidad de roturas de la componente 1 en 630 horas, tiene distribución de Poisson con parámetro 630/300: $\mathcal{P}(2{,}1)$; análogamente, N_2 es $\mathcal{P}(1{,}8)$.

   Hay que hallar el mínimo natural n tal que $P(N_1 \leq n \bigcap N_2 \leq n) = P(N_1 \leq n)P(N_2 \leq n) > 0{,}99$. Yendo a las tablas de distribución de Poisson, $P(N_1 \leq 5)P(N_2 \leq 5) = 0{,}989 \times 0{,}979 = 0{,}968$, no es suficiente. En cambio con $n = 6$, $P(N_1 \leq 6)P(N_2 \leq 6) = 0{,}997 \times 0{,}994 = 0{,}991$. Luego, 6 es la respuesta.

Problema 2

Si x es el porcentaje de estudiantes del interior, de la letra se deduce que $x + 2x + \frac{x}{3} = 1$, de donde $x = 0,3$. Luego, el porcentaje de estudiantes del interior es 30 %, de Montevideo es 60 % y del exterior, 10 %. Como el 12 % es privado del interior, y el 30 % es del interior, entonces el 18 % es público del interior. Como el 4 % es público del exterior y el 10 % es del exterior, entonces el 6 % es privado del exterior. Finalmente, como el 30 % es privado, y el 12 % es privado interior y el 6 % es privado exterior, entonces el 12 % es privado Montevideo. Como el 60 % es Montevideo, entonces el 48 % es público Montevideo. Estos resultados se pueden resumir en la siguiente tabla:

	Privado	Público
Interior	0,12	0,18
Exterior	0,06	0,04
Montevideo	0,12	0,48

1. *a*) $P(\Pr|I) = P(\Pr \bigcap I)/P(I) = 0,4$.
   b) $P(\Pr|M) = P(\Pr \bigcap M)/P(M) = 0,2$.
   c) $P(E|\Pr) = P(\Pr \bigcap E)/P(\Pr) = 0,2$

2. *a*) Es un muestreo sin reposición, donde se extraen 10 estudiantes de un universo de 50, donde hay 15 estudiantes que provienen de un liceo privado: es hipergeométrica $\mathcal{H}(10; 50, 15)$. Si X indica la cantidad de estudiantes en la muestra que provienen de liceo privado, la respuesta es $P(X = 8) = C_8^{15} C_2^{35} / C_{10}^{50} \approx 0,00037$.
   b) Es un muestreo sin reposición, donde se extraen 10 estudiantes de un universo de 50, donde hay 3 estudiantes que provienen de un liceo privado del exterior: es hipergeométrica $\mathcal{H}(10; 50, 3)$. Si Y indica la cantidad de estudiantes en la muestra que provienen de liceo privado del exterior, la respuesta es $P(Y = 2) + P(Y = 3) = (C_2^3 C_8^{47} + C_3^3 C_7^{47})/C_{10}^{50} \approx 0,098$.

Problema 3

1. Correlación de rangos: $r_S = -0{,}6$ con p-valor 0,175, se acepta la independencia. Rachas: son 2 y el p-valor es p=0.25, también acepta independencia.

2. Usando $K-S$, se tiene $D = 0{,}247$, el p-valor es mayor que 0.2, se acepta la hipótesis nula.

3. Como $\lambda = E(X)$ y un estimador es $\overline{X}_5$, la región de rechazo es de la forma $\mathcal{R} = \{\sum_{i=1}^{5} X_i \leq c\}$. Por la sugerencia, $\sum_{i=1}^{5} X_i \sim \mathcal{P}(20)$, lo que da un p-valor de 0.156, no rechaza la hipótesis nula.

4. La región de rechazo es $\mathcal{R} = \{\sum_{i=1}^{400} X_i \leq d\}$; por el TCL, $P(\frac{20(\overline{X}_{400}-4)}{2} \leq \frac{20(c-4)}{2}) \approx P(Z \leq \frac{20(c-4)}{2})$. Para hallar el p-valor, $c = 1574/400 = 3{,}935$; el p-valor es 0.25785, se acepta la hipótesis nula. El laboratorio debe ampliar su equipo.

5. $\frac{\sqrt{n}(c-4)}{2} \approx -1{,}28155$; $\frac{\sqrt{n}(c-3{,}6)}{\sqrt{3{,}6}} \approx 1{,}28155$. Despejando n, resulta $n \geq \left(\dfrac{1{,}28155}{2-\sqrt{3{,}6}}\right)^2 = 155{,}9$. El mínimo es 156.