N^o de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4
B	C	A	E
Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8
A	B	D	E

* Importante *

- El parcial dura 3 horas.
- Cada ejercicio vale 5 puntos, respuesta incorrecta: -1.25 puntos, sin respuesta: 0 punto.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- Los decimales están truncados, por ejemplo 1/6 = 0,1666... se trunca a 0,166 y no a 0,167.

Múltiple Opción

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Ejercicio 1

En una urna se tienen cinco fichas numeradas del 1 al 5. Sacamos un ficha, anotamos el número de la ficha y volvemos a poner la ficha en la urna. Se repite este procedimiento tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números que se sacaron hayan sido en orden creciente (estricto)?

(**A**) $0,093$ (**B**) $0,080$ (**C**) $0,134$ (**D**) $0,075$ (**E**) $0,153$

Resolución: Cada secuencia de tres números $x_1 < x_2 < x_3$ está en correspondencia biunívoca con los subconjuntos de tres elementos (distintos) a través de la función que le asigna el conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ ya que dada una tal secuencia tenemos un tal conjunto y dado un conjunto tenemos una única secuencia que lo tiene como imágen. La cantidad de subconjuntos de tres elementos tomados de un conjunto de cinco es $C_3^5 = C_2^5 = 10$. La cantidad total se secuencias no necesariamente crecientes de tres elementos tomados de cinco con repetición es $5^3 = 125$, de donde la probabilidad es $10/125 = 0,08$.

Ejercicio 2

Una caja contiene tres monedas: dos monedas justas (la probabilidad de que salga cara es $1/2$) y una moneda trucada con probabilidad de que salga cara igual a $3/4$. Se elige una moneda al azar. Si al tirarla se obtiene cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida haya sido la trucada?

(**A**) $0,444$ (**B**) $0,625$ (**C**) $0,428$ (**D**) 0.665 (**E**) $0,357$

Resolución: Por Bayes

$$\mathbb{P}(trucada|cara) = \frac{\mathbb{P}(cara|trucada)\mathbb{P}(trucada)}{\mathbb{P}(cara|trucada)\mathbb{P}(trucada) + \mathbb{P}(cara|no\ trucada)\mathbb{P}(no\ trucada)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{7} = 0,428$$

Ejercicio 3

En una fábrica donde se producen ciertos componentes, la probabilidad de que un componente resulte defectuoso es $0,02$. Si revisamos componentes al azar hasta encontrar un componente que resulte defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya que revisar al menos 7 componentes?

(**A**) $0,8858$ (**B**) $0,1318$ (**C**) $0,8507$ (**D**) $0,8681$ (**E**) $0,1492$

Resolución: Si X es la cantidad de revisiones que se realizan hasta encontrar uno defectuoso, entonces $X \sim Geo(0,02)$ de donde

$$\mathbb{P}(X \geq 7) = \sum_{i=7}^{\infty} 0,02 \times 0,98^{i-1} = 0,98^6 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 0,02 \times 0,98^{i-1}}_{=1} = 0,98^6 = 0,8858.$$

Ejercicio 4

Una empresa que fabrica computadoras, comprobó que el tiempo de vida (en años) de las computadoras fabricadas seguía una distribución normal con valor medio 20 años y desviación estándar 4 años ($\mu = 20$, $\sigma = 4$). Para vender dichas computadoras, necesitan ofrecerle garantías a sus compradores. En ese sentido, están buscando definir una cantidad de años k para la cual puedan asegurar que al menos el 84.61 % de las computadoras fabricadas vivan al menos esa cantidad de años. Calcular el k (entero) más grande que garantice esto.

(A) 14 **(B)** 13 **(C)** 17 **(D)** 16 **(E)** 15

Resolución: El tiempo de vida será una variable $X \sim N(20, 4^2)$ de donde $(X-20)/4 \sim N(0,1)$, por lo que

$$\mathbb{P}(X \geq k) \geq 0,8461 \iff \mathbb{P}\left(\frac{X-20}{4} \geq \frac{k-20}{4}\right) \geq 0,8461 \iff 1 - \Phi\left(\frac{k-20}{4}\right) \geq 0,8461$$

o sea

$$\Phi\left(\frac{k-20}{4}\right) \leq 1 - 0,8461 \iff \frac{k-20}{4} \leq -z_{0,8461} = -1,02 \iff k \leq 20 - 4,02 = 15,98.$$

De donde el mayor entero k posible es $k = 15$.

Ejercicio 5

Se considera una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de distribución viene dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x}}{10} & x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Entonces la probabilidad de que X pertenezca al intervalo $[-1, 2]$ es:

(A) $0,73$ **(B)** $0,81$ **(C)** $0,85$ **(D)** $0,88$ **(E)** $0,47$

Resolución: Para que F_X sea función de distribución de una variable aleatoria absolutamente continua, F_X debe ser continua en $x = 1$ de donde

$$\frac{e^{\alpha 1}}{10} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff e^{\alpha} = 5.$$

Finalmente

$$\mathbb{P}(X \in [-1,2]) = F_X(2) - F_X(-1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{e^{\alpha(-1)}}{10} = \frac{3}{4} - \frac{(e^{\alpha})^{-1}}{10} = \frac{3}{4} - \frac{5^{-1}}{10} = \frac{73}{100} = 0,73$$

Ejercicio 6

Un juego consiste en dos etapas, en la primera se tira una flecha a un blanco. La probabilidad de embocar en el blanco es de $0,745$. Si se logra embocar se pasa a la siguiente etapa donde pega a un martillo de feria de altura 3,2 metros. Si el contrapeso toca la campana el jugador gana. Si la altura H a la cual llega el contrapeso tiene una distribución exponencial con parámetro 1/2 ¿cuál es la probabilidad de que gane?

(**A**) $0,14$ (**B**) $0,15$ (**C**) $0,17$ (**D**) $0,18$ (**E**) $0,07$

Resolución:

$\mathbb{P}(ganar) = \mathbb{P}(H > 3,2\, y\, emboque) = \mathbb{P}(H > 3,2)\mathbb{P}(emboque) = e^{-(1/2)\times 3,2} \times 0,745 = 0,150.$

Ejercicio 7

Dos amigos quedan en encontrarse en un bar a eso de las 8:00pm. La distribución de la hora de llegada en uniforme entre 8:00 y 9:00. Cada uno espera a lo sumo media hora, sino se va. ¿Cuál es la probabilidad de que no se encuentren?

(**A**) $0,56$ (**B**) $0,64$ (**C**) $0,37$ (**D**) $0,25$ (**E**) $0,55$

Resolución: Las horas de llegadas son dos v.a. uniformes [0,1] con donde 0 significa 8:00 y 1 significa 9:00. Si ambos llegan a la misma hora $(X,Y) \in x = y$, la diferencia de media hora hacia arriba y hacia abajo establece una franja en el plano x,y donde se encontrarían. La probabilidad buscada es el complemento de dicha franja que consiste en dos triángulos rectángulos isósceles con dos lados de $\frac{1}{2}$ en la que juntos formar una cuadrado de lado $\frac{1}{2}$, por lo que la probabilidad de no encontrarse es $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = 0.25$

Ejercicio 8

Considere la altura H medida en metros y el peso W medida en Kg, de una persona como dos variables aleatorias absolutamente continuas a partir de las cuales se definen dos variables discretas H_d y W_d definidas como

$$H_d = \begin{cases} 1,6 & \text{si } H < 160 \\ 1,7 & \text{si } 160 < H < 170 \\ 1,8 & \text{si } 170 < H < 180 \\ 1,9 & \text{si } 180 < H < 190 \\ 2 & \text{si } 190 < H \end{cases} \qquad W_d = \begin{cases} 60 & \text{si } W < 60 \\ 80 & \text{si } 60 < W < 80 \\ 100 & \text{si } 80 < W < 100 \\ 120 & \text{si } 100 < W < 120 \\ 140 & \text{si } 120 < W \end{cases}$$

La función de probabilidad puntual conjunta de H_d, W_d está dada por la siguiente tabla:

H_d / W_d	$1,6$	$1,7$	$1,8$	$1,9$	2
60	$0,0045$	$0,0213$	$0,0073$	$0,0000$	$0,0000$
80	$0,0039$	$0,1476$	$0,3217$	$0,0764$	$0,0017$
100	$0,0006$	$0,0270$	$0,2033$	α	$0,0073$
120	$0,0000$	$0,0000$	$0,0112$	$0,0236$	$0,0039$
140	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0006$	$0,0011$

La probabilidad de que una persona pese más de 80 kg si mide entre 1,60 y 1,80 m es:

(**A**) $0,3116$ (**B**) $0,3137$ (**C**) $0,3206$ (**D**) $0,3254$ (**E**) $0,3266$

Resolución: Sin importar el α la probabilidad de que una persona pese más de 80 kg si mide entre 1,60 y 1,80 m es:

$$
\begin{aligned}
P = \mathbb{P}(W > 80 | 1,6 < H < 1,8) &= \mathbb{P}(W_d = 100, 120, \text{ o } 140 | H_d = 1,7 \text{ o } 1,8) \\
&= \frac{\mathbb{P}(W_d = 100, 120 \text{ o } 140, H_d = 1,7 \text{ o } 1,8)}{\mathbb{P}(H_d = 1,7 \text{ o } 1,8)} \\
&= \frac{0,0270 + 0,2033 + 0,0112}{0,0270 + 0,2033 + 0,0112 + 0,1476 + 0,0213 + 0,3217 + 0,0073} = 0,3266
\end{aligned}
$$