Universidad de la República **24 de abril de 2023**
Facultad de Ingeniería-IMERL

PRIMER PARCIAL: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA (SOLUCIÓN)

Ejercicio 1

$\text{P}(1^a \text{ b / ambas de igual color}) = \frac{P(bb)}{P(\text{ambas de igual color})} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}.$

Ejercicio 2

Tenemos $C_2^5 = 10$ formas de elegir los lugares donde irán las dos letras de BIEN y $C_2^3 = 3$ formas de elegir los lugares donde irán las dos letras de la palabra MAL.

Una vez que tenemos elegidos los lugares donde irán las dos letras de BIEN y las dos de MAL, por ejemplo $\overset{\text{2 letras de BIEN}}{(--)}\ \overset{\text{2 letras de MAL}}{(--)}\ \overset{\text{letra restante}}{(-)}$ tenemos $\underset{\text{2 letras de BIEN}}{(4\times 3)} \times \underset{\text{2 letras de MAL}}{(3\times 2)} \times \underset{\text{la restante}}{20}$.
Entonces tenemos $10 \times 3 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 20 = 43.200$.

Ejercicio 3

- Si Gladys se acuesta entre las 23:10 y las 23:30, X =número de campanadas que suenan en las que Gladys duerme y no se despierta entre las campanadas de la hora 0:00 hasta la hora 7 inclusive, entonces que Gladys duerma decorrido 8 horas y media significa que $X = 8$. En este caso $X \sim \text{Bin}(n = 8, p = 0{,}7)$.

- Si Gladys se acuesta entre las 23:30 y las 0:00 X =número de campanadas que suenan en las que Gladys duerme y no se despierta entre las campanadas de la hora 0:00 hasta la hora 8 inclusive, tenemos que $X = 9$. En este caso $X \sim \text{Bin}(n = 9, p = 0{,}7)$.

- Si Gladys se acuesta entre las 0:00 y las 0:10 entonces X =número de campanadas que suenan en las que Gladys duerme y no se despierta entre las campanadas de la hora 1 hasta la hora 8 inclusive tenemos $X = 8$. En este caso $X \sim \text{Bin}(n = 8, p = 0{,}7)$.

En definitiva, como Gladys se acuesta a una hora con distribución uniforme y tenemos la mitad del horario (entre 23:10 y 23:30 y entre 0 y 0:10) en donde $X = 8$ y la otra mitad del horario (entre las 23:30 y las 0) $X = 9$, la probabilidad de que Gladys duerma de corrido las 8 horas y media es $\frac{1}{2}P(X = 8) + \frac{1}{2}P(X = 9)$ (se puede hacer un árbol para visualizarlo).

Entonces $\frac{1}{2}P(X = 8) + \frac{1}{2}P(X = 9) = \frac{1}{2} \times 0{,}7^8 + \frac{1}{2} \times 0{,}7^9 = 0{,}049$.

Ejercicio 4

$P(|X-Y|=2)=a+\frac{1}{12}=\frac{3}{24}$ por lo que $a=\frac{1}{24}$.
Ahora usamos la independencia. $P(X=-1,Y=0)=P(X=0)P(Y=1)$, o sea $\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+b\right)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$ de donde sale que $b=\frac{1}{8}$.

Análogamente $\left(\frac{1}{12}+c+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$, de donde sale que $c=\frac{1}{6}$.
Además la suma de todos los elementos del cuadro debe dar 1, de donde se deduce que $d=\frac{1}{8}$. Entonces $a-b+c-d=1/24-1/8+1/6-1/8=-\frac{1}{24}$.

Ejercicio 5

$P(X=1)$= $P(X\geq 4\ /\ X\geq 2)=\frac{P(X\geq 4)}{P(X\geq 2)}$ equivale a la ecuación $p=\frac{1-p-p(1-p)-p(1-p)^2}{1-p}$, simplificando entre $1-p$ y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante $p^2-3p+1=0$, obtenemos que $p=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ejercicio 6

Sabemos que $B\cap C=\phi$
$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=0{,}28$ queda la ecuación $3P(A)-(P(A))^2=0{,}28$ resolviendo la ecuación de segundo grado nos queda que $P(A)=0{,}1$.

Entonces la probabilidad de que ocurran al menos dos de los 3 conjuntos es $P(A\cap B)+P(A\cap C)=0{,}1^2+0{,}1^2=0{,}02$.

Ejercicio 7

$\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx=1$ de donde se deduce que $\lambda=2$.
$F_X(1/2)=\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx+\int_{0}^{1/2} e^{-2x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-1}$.

Ejercicio 8

$k\int_0^1\left(\int_0^2(x+y)\,dy\right)dx=1$ por lo que queda $3k=1$, entonces $k=1/3$.
$P(Y>X)=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\int_x^2(x+y)\,dy\right)dx=\frac{5}{6}$.