ESQUEMA DE SOLUCIONES DEL PRIMER PARCIAL MAYO 2021

PREGUNTA 1

Tenemos 3 cajas con bolas rojas y azules. La caja 1 tiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 tiene 2 rojas y 2 azules y la caja 3 tiene 2 rojas y 3 azules. El experimento consiste en extraer una sola bola de alguna de las urnas de acuerdo al siguiente procedimiento. Se lanza una moneda. Si el resultado es cara se extrae una bola al azar de la caja 1. Si el resultado es cruz, se vuelve a lanzar la moneda. Si en este segundo lanzamiento sale cara se extrae una bola al azar de la caja 2, y si sale cruz la bola se extrae de la caja 3.
Si se sabe que la bola extraída es roja, la probabilidad de que provenga de la caja 1 es:

Solución.

$$P\left(caja1/bolaroja\right) = \frac{P(caja1, bolaroja)}{P\left(bolaroja\right)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\frac{3}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\frac{2}{5}} = 0.571.$$

PREGUNTA 2

Un estudiante debe responder un ejercicio múltiple opción con 4 opciones, de las que solamente una es correcta. La probabilidad de que el estudiante sepa la respuesta correcta es 4/5, y si no la sabe responde una de las opciones al azar. La probabilidad de que el estudiante supiese la respuesta correcta dado que contestó bien la pregunta es:

Solución.

Le llamo S="el estudiante sabe la respuesta correcta" y B="el estudiante contesta bien la respuesta". Entonces

$$P\left(S/B\right) = \frac{P\left(S \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\frac{1}{4}} = 0.941.$$

PREGUNTA 3

Se dispone de una colección de escarabajos formada por once ejemplares: seis pertenecientes a cierta especie A, tres pertenecientes a la especie B y dos perteneciente a una tercera especie C. El índice de diversidad introducido por el físico Leon Brillouin depende del número H: la cantidad de formas posibles de ordenar los ejemplares si sólo tenemos en cuenta la clasificación en especies. ¿Cuánto vale H en este caso?

Solución.

$$C_6^1 C_3^5 = 4620.$$

PREGUNTA 4

En una escuela, el peso de los distintos alumnos se puede modelar como una variable aleatoria continua, en particular como una normal con valor medio 34kg, y desviación estándar 5kg ($\mu = 34, \sigma = 5$). En dicha escuela se utiliza una balanza para pesar a los alumnos que sólo puede tomar valores enteros. Más aún, al pesar a un alumno, la balanza retorna el peso de dicho alumno pero redondeado hacia abajo. Por ejemplo, si un alumno pesa 40kg la balanza retorna 40kg, pero si un alumno pesa 34.95kg la balanza retorna 34kg. Sea Y la variable aleatoria que indica el valor retornado por la balanza al pesar un alumno, encontrar k entero para el cual $P(Y > k) = 0.4207$.

Solución.

$$P(Y > k) = P(Y \geq k+1) = P(X \geq k+1) = 1 - \phi\left(\frac{k+1-34}{5}\right) = 0.4207$$

de donde se deduce que $\frac{k-33}{5} = 0.2001$, de donde sale $k = 34$.

PREGUNTA 5

Una aerolínea posee un avión con capacidad para 33 pasajeros. Siempre venden 4 pasajes de más y conocen a su clientela como para saber que 2 de cada 100 no se presentan al vuelo por enfermedad y otros 3 de los 100 por motivos familiares tampoco se presentan. Asumiendo que la decisión de viajar o no de las personas son independientes entre sí. ¿Cuál es la probabilidad de qué no quede nadie sin lugar para el vuelo y el vuelo salga con 2 o menos lugares vacíos?

Solución.

Definimos X =cantidad de personas que viajan efectivamente entre los 37 pasajes vendidos.

Entonces $X \sim$Bin$(n = 37, p = 0.95)$ por lo que la probabilidad pedida es

$$P(31 \leq X \leq 33) = P(X = 31) + P(X = 32) + P(X = 33) = 0.11.$$

PREGUNTA 6

Un paquete de 20 baterías tiene 2 baterías defectuosas. Durante el control de calidad, se extraen 3 baterías del paquete al azar y sin reposición. ¿Cuál es el valor esperado de baterías defectuosas?

Solución.

Definimos X = cantidad de defectuosas entre las 3 extraídas. Entonces X es hipergeométrica con parámetros $N = 20$, $n = 3$, $D = 2$.

Entonces

$$\mathbb{E}(X) = ND/n = 0.3.$$

PREGUNTA 7

Si $X \sim U(0,1)$, $Y \sim U(0,2)$ son independientes, entonces $P(X < Y) =$

Solución.

La densidad conjunta es $f_{X,Y}(x,y) = 1/2$ si $0 < x < 1$, $0 < y < 2$, $f_{X,Y}(x,y) = 0$ en otro caso.

Entonces, se le llamamos $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\right\}$ nos queda

$$P(X < Y) =_A f_{X,Y}(x,y)dxdy = 0.75.$$

PREGUNTA 8

Si X e Y son dos variables aleatorias discretas, cuyas probabilidades conjuntas puntuales se dan en la siguiente tabla (siendo a un parámetro que debe ser hallado).

Y/X	3	4	5	6
1	0.05	0.05	0.1	0.05
2	0.1	a	0.05	0.05
3	0.05	0.05	0.1	0.03
4	0.1	0.05	0.05	0.05

.

Si $Z = X + Y$, entonces $P(5 \leq Z < 7) =$

Solución.

Primero hallamos el valor $a = 0.07$ (sumando todos los valores del cuadro e igualando a 1).

Entonces

$$P(5 \leq Z < 7) = P(Z = 5) + P(Z = 6) = 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.07 + 0.05 = 0.37.$$