Versión A

Respuestas Ejercicio 1 Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	V	F	F	F	F	V	V	F	F

Respuestas Ejercicios Multiple Opción (Ejercicios 2 al 11)

E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10	E. 11
A	D	B	C	A	B	C	B	B	A

Versión B

Respuestas Ejercicio 1 Verdadero o Falso

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	F	V	V	F	V	F	F

Respuestas Ejercicios Multiple Opción (Ejercicios 2 al 11)

E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8	E. 9	E. 10	E. 11
B	C	B	B	A	C	D	A	A	B

Ejercicio 1 (10 puntos)

Verdadero o falso

1. Una función de densidad f cumple que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Si A y B son dos sucesos entonces $\mathbb{P}(A) = 2 - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) - \mathbb{P}(A^c \cup B)$
3. Si X e Y son independientes entonces $Var(X - Y) = Var(X) - Var(Y)$
4. Si $\mathbb{P}(A) = 0.8$ y $\mathbb{P}(B) = 0.3$ entonces $\mathbb{P}(B \setminus A) = 0.5$.
5. Si X_1, X_2 y X_3 tienen distribución normal $N(0,1)$ entonces $X_1 + X_2 + X_3$ tiene distribución normal $N(0,3)$
6. Si A y B son dos sucesos $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c) = 1$
7. Si $X \leq Y$ entonces $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
8. Si A y B son dos sucesos entonces $\mathbb{P}(A|B^c)(1 - \mathbb{P}(B)) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cup B)$
9. Si X e Y son variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ entonces $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$
10. Si $X \sim U[0,2]$ e $Y = 2X + 1$ entonces $f_Y(2) = 1/2$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Consideramos la función de densidad $f(x) = |x|$, $-1 < x < 1$ y $f(x) = 0$, $|x| \geq 1$, X e Y dos variables aleatorias independientes con esta densidad. Si $Z = min\{X,Y\}$ entonces $F_Z\left(\frac{1}{2}\right)$ vale:

(A) $\frac{55}{64}$ **(B)** $\frac{5}{8}$ **(C)** $\frac{3}{8}$ **(D)** $\frac{9}{64}$

Solución: Si X tiene densidad f entonces $F_X(x) = 0$ para $x \leq -1$. Si $|x| < 1$ entonces $F_X(x) = \int_{-1}^{x} |u|du$. Entonces para $-1 < x \leq 0$ $F_X(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)$, para $0 \leq x < 1$ $F_X(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)$ y para $x \geq 1$ $F_X(x) = 1$ y así $F_X(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$.

Calculemos

$$\mathbb{P}(Z > z) = \mathbb{P}(X > z, Y > z) = \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = (\mathbb{P}(X > z))^2.$$

$$F_Z(z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) = 1 - (\mathbb{P}(X > z))^2 = F_X(z)(2 - F_X(z)).$$

Pero como $F_X(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}) = \frac{5}{8}$. Y entonces $F_Z(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}(2-\frac{5}{8}) = \frac{55}{64}$.

Ejercicio 3 (3 puntos)

Un virus de la familia de los coronavirus tiene un genoma de aproximadamente 30.000 nucleótidos. La probabilidad de que haya un error en la copia de uno de esos nucleótidos es de aproximadamente 0,0001.

Use la distribución de Poisson para aproximar la probabilidad de que en una ronda de replicación haya al menos cinco errores. Dicha aproximación vale

(A) 0,101 **(B)** 0.916 **(C)** 0.084 **(D)** 0.185

Solución: El número de errores en una ronda de replicación X tiene una distribución binomial con parámetros $n = 30.000$ y $p = 0.0001$. Aproximamos X por una variable de Poisson Y de parámetro $\lambda = np = 3$. La probabilidad de que en una ronda haya al menos cinco errores la aproximamos por

$$\mathbb{P}(Y \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0.1847$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ y sea Y una variable aleatoria, independiente de X con distribución de Poisson de parámetro λ. A partir de estas dos variables, definimos $Z = X.Y$. Calcular $Cov(X,Z)$.

(A) $\frac{2}{\lambda^2} - 1$ **(B)** $\frac{1}{\lambda}$ **(C)** $\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}$ **(D)** 0

Solución:

$$Cov(X,Z) = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X^2Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(XY) =$$

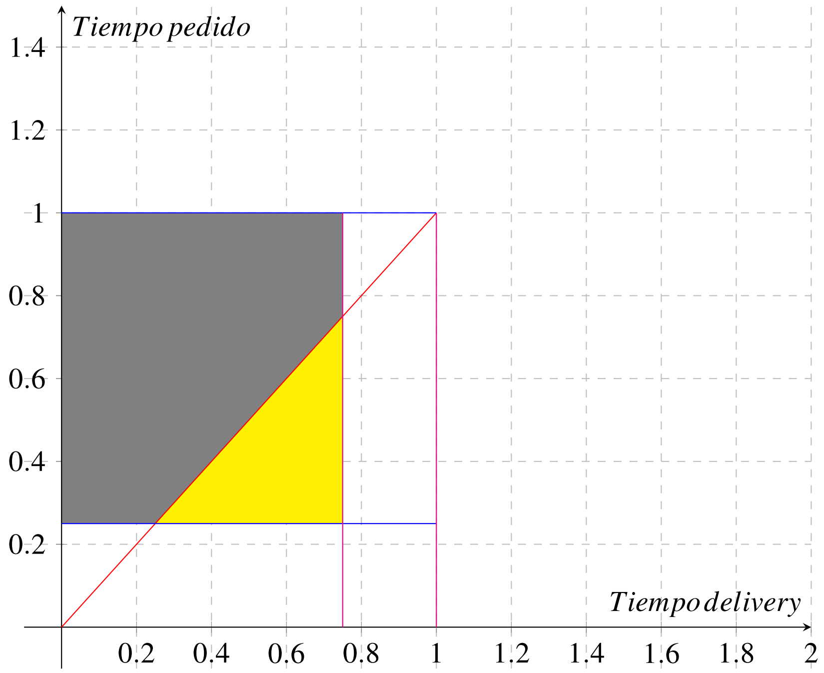
$$\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{\lambda^2}\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\lambda = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Ejercicio 5 (3 puntos)

Es fin de semana y he decidido pedir pizza, pienso llamar para realizar el pedido en algún momento después de las 20:15 y no más allá de las 21. El repartidor de la pizzería comienza el reparto entre las 20 y 20:45. La pizzería toma mi pedido solo si aún el repartidor no ha salido. ¿Cuál es la probabilidad de que rechacen mi pedido? En este ejercicio los tiempos considerados son uniformes e independientes entre sí.

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{7}{9}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

Solución:



La probabilidad de que rechacen mi pedido se corresponde con la relación entre el área gris y el área total (área gris+área amarilla).

P(rechacen mi pedido)=$\mathbb{P}(X < Y) = 1 - \mathbb{P}(X \geq Y) = 1 - \frac{30^2/2}{45^2} = \frac{7}{9}$

Ejercicio 6 (3 puntos)

Un golfista golpea a una pelota de golf, con una velocidad de $43.3\frac{m}{s}$, y con un ángulo (θ) que varía de manera uniforme entre $\frac{\pi}{6}$ radianes y $\frac{\pi}{4}$ radianes, (es decir, $\theta \sim \mathbf{U}[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$).

Sabiendo que con la velocidad inicial dada, el alcance máximo de su golpe (X) depende del ángulo del golpe θ, según la relación $X = 191 \cdot \sin(2\theta)$

¿Cuál es el valor esperado (aproximado) del alcance de sus golpes?

(A) 182 m **(B)** 364 m **(C)** 191 m **(D)** 178 m

Solución:

En primer lugar, la densidad de Θ es:

$$p_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}} & \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}] \\ 0 & sino \end{cases}$$

Se debe usar la propiedad de esperanza, que indica que si:

$$X = g(\theta) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) p_\Theta(\theta) d\theta \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 191 \cdot sen(2\theta) \frac{1}{\frac{\pi}{12}} d\theta = \frac{191 \cdot 12}{2\pi} (-cos(2\theta)) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{191 \cdot 12}{4\pi} = 182$$

Ejercicio 7 (3 puntos)

Como sistema de seguridad de un banco, se toma las huellas digitales de los usuarios al momento de hacer un trámite o transacción. Para ello, el banco compra un dispositivo lector de huellas con las siguientes características:

La tasa de error en los clientes (el dispositivo rechaza, pero es cliente) es del 15 %. La tasa de error en no clientes (el dispositivo lo admite, pero no es cliente) es del 5 %.

Se obtuvo la estadística de que, por motivos desconocidos, 0.1 % de las personas que ingresan al banco para hacer un trámite no son clientes del banco.

Para conocer la seguridad de su sistema, el banco precisa saber, ¿cuál es la probabilidad (aproximada) de que, si el dispositivo admite a alguien, esta persona sea un intruso?

(A) $3.3 \cdot 10^{-4}$ **(B)** $5.9 \cdot 10^{-5}$ **(C)** 0.050 **(D)** 0.056

Solución:

Si se definen los eventos: $A = \{\text{El usuario fue admitido}\}$ y $C = \{\text{El usuario es cliente}\}$ y acordemente se definen A^C y C^C.

Se pide entonces: $\mathbb{P}(C^C|A)$. Por letra, se tienen:

$\mathbb{P}(A|C^C) = 0.05, \quad \mathbb{P}(A|C) = 0.85, \quad \mathbb{P}(C) = 0.001, \quad \mathbb{P}(C^C) = 0.999.$

$\mathbb{P}(C^C|A) = \frac{\mathbb{P}(A|C^C)\mathbb{P}(C^C)}{\mathbb{P}(A|C^C)\mathbb{P}(C^C)+\mathbb{P}(A|C)P(C)} = \frac{0.05 \cdot 0.001}{0.85 \cdot 0.999+0.05 \cdot 0.001} = 5.9 \cdot 10^{-5}$

Ejercicio 8 (3 puntos)

Se tienen 3 bolillas, una de color rojo, otra azúl y otra negra. Cada bolilla viene en una caja de su mismo color. Se me cayeron las bolillas de las cajas y las vuelvo a guardar de forma aleatoria.

¿Cuál es el valor esperado de bolillas que terminen en su caja original?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{3}{2}$

Solución:

Tomamos una V.A. X que cuenta cuantas bolillas terminan en su caja correcta. El recorrido de X es $\{0, 1, 3\}$ y las probabilidades puntuales respectivas son $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{6}$.

$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{2}{6}+1 \cdot \frac{3}{6}+3 \cdot \frac{1}{6}=1$

Ejercicio 9 (3 puntos)

Sea X una variable con distribución uniforme en el intervalo $(-2, 2)$.

Sea $f_Y(y)$ la densidad de $Y = X^3$. Calcular $f_Y(1)$.

(A) 0 **(B)** $1/12$ **(C)** $1/6$ **(D)** $1/4$

Solución: Usaremos la fórmula de cambio de variable

La derivada es $dy/dx = 3x^2$ con $x^3 = y$. El recorrido de Y es el intervalo $(-8, 8)$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} y^{-2/3} f_X(y^{1/3})$$

Entonces

$$f_Y(1) == \frac{1}{3} 1^{-2/3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ya que $f_X(1) = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 10 (3 puntos)

Un fabricante de gomas produce gomas de borrar cuyo peso (en gramos) tiene distribución normal de media 20 y varianza 0.16. Suponga que 15 gomas se seleccionan independientemente y se pesan. Sea X igual al número de estas gomas que pesan menos de 19.8 gramos.

Calcular $\mathbb{P}(X \leq 2)$.

(**A**) 0.022 (**B**) 0.113 (**C**) 0.287 (**D**) 0.333

Solución: Llamemos P_i al peso de la i-ésima goma, para $1 \leq i \leq 15$.

Definimos
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i \leq 19.8 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Estas son variables Bernoulli de parámetro

$$p = P(P_i \leq 19.8) = P\left(\frac{P_i - 20}{0.4} \leq \frac{19.8 - 20}{0.4}\right) = \Phi(-0.5) = 0.3085$$

Como $X = X_1 + \cdots + X_{15}$ tiene distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0.3085$, tenemos

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (1-p)^{15} + 15p(1-p)^{14} + 105p^2(1-p)^{13} = 0.113 \end{aligned}$$

Ejercicio 11 (3 puntos)

Sea X una variable aleatoria con media $\mu = 75$ y desvío estándar $\sigma = 5$. Usando la desigualdad de Chebyshev, se tiene que $\mathbb{P}(65 \leq X \leq 85) \geq a$ donde la suma del numerador y del denominador de a es:

(**A**) 7 (**B**) 11 (**C**) 1 (**D**) 17

Solución:

$\mathbb{P}(65 \leq X \leq 85) = \mathbb{P}(|X - 75| \leq 10) = 1 - \mathbb{P}(|X - 75| > 10) \geq 1 - 25/100 = 1 - 1/4 = 3/4$ Entonces la suma del numerador y del denominador de a es 7.

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986