Respuestas correctas

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Versión 1	E	C	T	F	E	E	A	A	D	B	B	E
Versión 2	B	C	T	F	E	D	B	F	E	B	E	B

Soluciones

Ejercicio 1

Denotemos A y B a las dos amigas. Girando la mesa si es necesario podemos suponer que A se sienta en un lugar fijo. Luego, quedan 5 lugares disponibles para B, de los cuales 2 están junto a A. La probabilidad es $2/5$.

Ejercicio 2

Siempre vale que

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$.
- $P(A \cup B) \geq \text{máx}\{P(A), P(B)\} = \text{máx}\{0.3, 0.4\} = 0.4$.

Ejercicio 3

X puede valer 1,2,3,4, con probabilidades

- $\frac{2}{5}$;
- $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$;
- $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$;
- $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$.

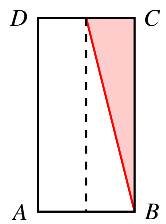
La tabla con la f.p.p. y la f.d.a. de X queda:

Valor de X	1	2	3	4
f.p.p.	$4/10$	$3/10$	$2/10$	$1/10$
f.d.a.	$4/10$	$7/10$	$9/10$	$10/10$

Ejercicio 4

Sea $X = (x, y)$ las coordenadas del punto aleatorio. Las áreas de los triángulos correspondientes son

$$\text{Area}(ABX) = \frac{y}{2}, \quad \text{Area}(BCX) = \frac{2(1-x)}{2} = 1 - x.$$



Entonces, la condición buscada es

$$\frac{y}{2} \geq 2(1-x) \Leftrightarrow y \geq 4(1-x).$$

El evento se muestra en rojo en el dibujo, tiene probabilidad $1/4$.

Ejercicio 5

Notar que $X \geq 0$. Entonces, podemos integrar la función $1 - F(x)$ en $[0. + \infty]$, que en ese rango de valores vale

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x(2-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Integrando

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} 1 - F(x)\, dx = \int_0^1 1 - 2x + x^2 dx = \int_0^1 (x-1)^2 dx = 1/3.$$

Ejercicio 6

La tabla completa es:

Y \ X	0	1	2	total
0	$1/9$	$2/9$	$1/9$	$4/9$
1	$2/9$	$2/9$	0	$4/9$
2	$1/9$	0	0	$1/9$
Total	$4/9$	$4/9$	$1/9$	1

La opción correcta es:

$$P(Y \leq 1 | X = 1) = \frac{2/9 + 2/9}{4/9} = 1.$$

Ejercicio 7

Llamemos p a la probabilidad de obtener cara con la moneda seleccionada, y A al evento CXX en ese orden. Entonces, por el teorema de Bayes

$$P\left(p = \frac{1}{2} \middle| A\right) = \frac{P\left(A \middle| p = \frac{1}{2}\right) P\left(p = \frac{1}{2}\right)}{P(A)}$$

Por la fórmula de la probabilidad total

$$P(A) = P\left(A \middle| p = \tfrac{1}{2}\right) P\left(p = \tfrac{1}{2}\right) + P\left(A \middle| p = \tfrac{1}{4}\right) P\left(p = \tfrac{1}{4}\right) + P\left(A \middle| p = \tfrac{3}{4}\right) P\left(p = \tfrac{3}{4}\right)$$

Luego

$$P\left(p = \frac{1}{2} \middle| A\right) = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{4^3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4^3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Ejercicio 8

Sea X la nota de un estudiante. Entonces $X \sim N(50,25)$. La probabilidad de que un estudiante saque 55 o más es

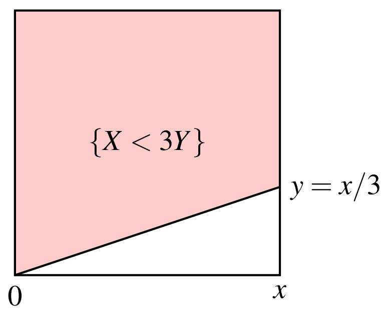
$$p = P(X \geq 55) = P\left(\frac{X-50}{5} \geq 1\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413.$$

Por independencia, la probabilidad de que al menos uno de ellos saque 55 o mas es

$$1-(1-p)^5 = 1-(0.8413)^5 = 0.5785.$$

Ejercicio 9

Tenemos $X \sim \exp(1)$ e $Y \sim \exp(2)$. El evento $\{X < 3Y\}$ se muestra en el siguiente dibujo:



Entonces

$$P(X<3Y) = \int_0^{+\infty}\left[\int_{x/3}^{+\infty} 2e^{-2y}dy\right]e^{-x}dx = \int_0^{+\infty}\left[-e^{-2y}\right]_{x/3}^{+\infty} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-5x/3}dx = \frac{3}{5}$$

Ejercicio 10

Sea X_i la variable Bernoulli que indica si hay un par consecutivo de caras empezando en el lugar i, para $i = 1,\ldots,4$.

La probabilidad de éxito es

$$P(X_i = 1) = 1/4 \Rightarrow \mathrm{E}(X_i) = 1.$$

La cantidad de pares consecutivos de caras es

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4,$$

por lo que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3) + \mathrm{E}(X_4) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Ejercicio 11

Para que los pesos combinados de los dos pares sean iguales, puede ocurrir que

1. las 4 monedas sean auténticas;
2. haya una moneda falsa en cada par.

El número de posibilidades en el primer caso es

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{8!}{2!6!} \frac{6!}{2!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4}.$$

El número de posibilidades en el segundo caso es $(2 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 1)$.

La probabilidad de que las 4 sean auténticas, dado que los pesos combinados son iguales es

$$\frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4}}{2 \cdot 8 \cdot 7 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4}} = \frac{30}{8+30} = \frac{15}{19}.$$

Ejercicio 12

La esperanza de X_i es cero por simetría, por lo que

$$\operatorname{Var}(X_i) = \operatorname{E}\left(X_i^2\right) = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{5}.$$

La desigualdad de Chebyshev afirma que

$$P\left(\left|\overline{X}_n\right| > 0.1\right) \leq \frac{\operatorname{Var}\left(\overline{X}_n\right)}{(0.1)^2} = \frac{300}{5n} = \frac{60}{n}.$$

El menor valor de n que cumple

$$\frac{60}{n} \leq 0.05 = \frac{1}{20}$$

es $n = 60 \cdot 20 = 1200$.
