Solución Primer Parcial
Viernes 27 de abril 2018.

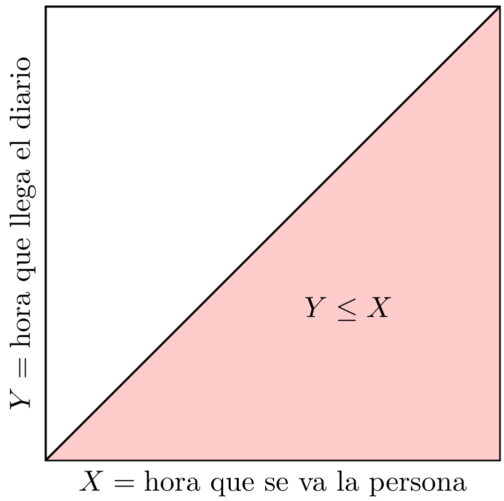
Ejercicio 1. [**7 puntos**]

Una persona recibe el diario en su casa a una hora al azar entre las 7 am y las 8 am. Sin embargo, la persona parte al trabajo a una hora también al azar entre la 7 am y las 8 am.

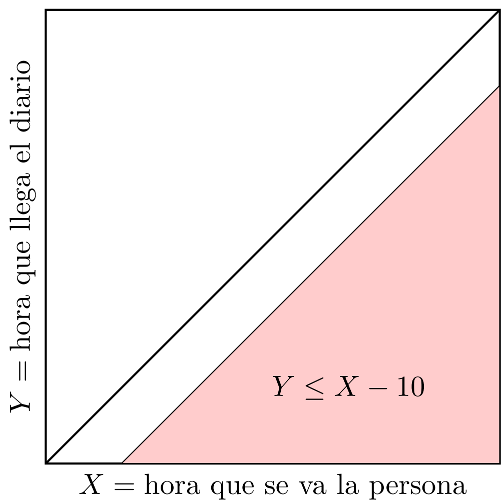
1. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona reciba el diario antes de irse a trabajar?
2. Si además la persona demora 10 minutos en leer el diario. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona lea el diario antes de ir a trabajar, dado que lo ha recibido?

Solución:
Definimos X al momento en que la persona parte de la casa, e Y el momento en el que llega el diario.

1. Notar que el diario llega antes de que la persona se vaya a trabajar si, y solo si, $Y \leq X$. Este evento es el triángulo inferior que se muestra en la figura. Luego $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1/2$.



2. Para que la persona pueda leer completamente el diario, este debe llegar al menos diez minutos antes de que se vaya. Esta condición se escribe como $Y \leq X - 10$. Este evento es el triángulo que se muestra en la figura:



Notar que como $Y \leq X - 10$ implica $Y \leq X$, entonces

$$\mathbf{P}(Y \leq X - 10 | Y \leq X) = \frac{\mathbf{P}(Y \leq X - 10)}{\mathbf{P}(Y \leq X)} = \frac{\left(\frac{50 \times 50}{2}\right)/(60 \times 60)}{1/2} = \frac{25}{36}$$

Ejercicio 2. [**9 puntos**]

Se lanzan dos dados equilibrados de **cuatro** caras cada uno. Sea X el resultado del primer dado, e Y el menor de los dos resultados.

1. Escribir la distribución conjunta de X e Y. Indicar si X e Y son independientes.
2. Calcular $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$ la covarianza entre X e Y.

Solución:

1. $\text{Rec}(X) = \text{Rec}(Y) = \{1, 2, 3, 4\}$. La función de probabilidad conjunta de X e Y $p_{X,Y}(x, y)$ es:

x/y	1	2	3	4	p_X
1	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
p_Y	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	

   No son independientes. Por ejemplo $p_{X,Y}(1, 1) = 1/4$ y $p_X(1) \cdot p_Y(1) = \frac{4}{16}\frac{7}{16}$.

2. $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k \in \text{Rec}(X)} P(X = k, Y = k) = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16}$

3. Calculamos $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

   Las funciones de probabilidad puntual (marginales) de X e Y son:

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{4} p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{4} \quad x = 1, 2, 3, 4$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{4} p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{7}{16} \text{ si } y = 1; \\ \frac{5}{16} \text{ si } y = 2; \\ \frac{3}{16} \text{ si } y = 3; \\ \frac{1}{16} \text{ si } y = 4; \end{cases}$$

   Por lo tanto, resulta que:

$$\mathbf{E}(X) = (1 + 2 + 3 + 4)\frac{1}{4} = \frac{10}{4}.$$

$$\mathbf{E}(Y) = 1\frac{7}{16} + 2\frac{5}{16} + 3\frac{3}{16} + 4\frac{1}{16} = \frac{30}{16}.$$

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{x,y} xyP(X = x, Y = y) = 1\frac{4}{16} + 2\frac{1}{16} + 3\frac{1}{16} + 4\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}\right) + 6\frac{1}{16} + 8\frac{1}{16} + 9\frac{2}{16} + 12\frac{1}{16} + 16\frac{1}{16} = \frac{85}{16}$$

   Entonces $\mathbf{cov}(X, Y) = \frac{85}{16} - \frac{10}{4}\frac{30}{16} = \frac{10}{16}$

Ejercicio 3. [**9 puntos**]

Se lanza una moneda equilibrada hasta obtener cara. Si el número de lanzamientos es impar, se extrae una bola de una urna que tiene cuatro bolas rojas y dos blancas; si el número de lanzamientos es par, se extrae una bola de una urna que tiene dos bolas rojas y cuatro blancas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de lanzamientos de la moneda sea par?
2. Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿qué es más probable: que se haya lanzado un número par o impar de veces la moneda?

Solución:

1. Sea X la v.a. que cuenta el número de lanzamientos hasta obtener una cara. X es una geométrica de parámetro $1/2$. Entonces,

$$\mathbb{P}(X \text{ sea par}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2k-1} \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

2. Para saber qué es más probable tenemos que comparar $\mathbf{P}(X \text{ par}|\text{ salió roja})$ con $\mathbf{P}(X \text{ impar}|\text{ salió roja})$. Aplicando Bayes obtenemos:

$$\mathbb{P}(X \text{ par}|\text{ salió roja}) = \frac{\mathbb{P}(\text{roja}|X \text{ par})\mathbb{P}(X \text{ par})}{\mathbb{P}(\text{roja})}$$

$$\mathbb{P}(X \text{ impar}|\text{ salió roja}) = \frac{\mathbb{P}(\text{roja}|X \text{ impar})\mathbb{P}(X \text{ impar})}{\mathbb{P}(\text{roja})}$$

Como ambos denominadores coinciden sólo necesitamos calcular los numeradores. Para esto vamos a usar que $\mathbb{P}(X \text{ sea impar}) = 1 - \mathbb{P}(X \text{ sea par}) = \frac{2}{3}$.

$$\mathbb{P}(\text{roja}|X \text{ par})\mathbb{P}(X \text{ par}) = \frac{2}{6}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$\mathbb{P}(\text{roja}|X \text{ impar})\mathbb{P}(X \text{ impar}) = \frac{4}{6}\frac{2}{3} = \frac{4}{9} > \mathbb{P}(\text{roja}|X \text{ par})\mathbb{P}(X \text{ par}).$$

Por lo tanto es más probable que la moneda haya sido tirada un número impar de veces.

Ejercicio 4. [**9 puntos**]

En una población el 1% padece de daltonismo. Se selecciona una muestra de 1000 personas con reposición de dicha población. Sea X el número de personas con daltonismo en la muestra.

1. Indicar el número esperado de personas con daltonismo en la muestra.
2. Calcular la probabilidad de que haya a lo sumo dos personas con daltonismo en la muestra.
3. Utilizando una aproximación adecuada, calcular la probabilidad de que haya al menos 8 y a lo sumo 12 personas con daltonismo en la muestra.

Solución:

1. Al ser un muestreo con reposición resulta que X tiene distribución Binomial con parámetros $n = 1000$ y $p = 0.01$. Por lo tanto $\mathbf{E}(X) = np = 1000 \times 0.01 = 10$.

2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 2) = &\ \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ = &\ \binom{1000}{0} 0.01^0 0.99^{1000} + \binom{1000}{1} 0.01^1 0.99^{999} + \binom{1000}{2} 0.01^2 0.99^{998} \\ \approx &\ 0.00268 \end{aligned}$$

3. Dado que n es grande y p es chico, podemos aproximar a la Binomial por una Poisson de parámetro $\mu = np = 1000 \times 0.01 = 10$. Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(8 \leq X \leq 12) = \sum_{k=8}^{12} \mathbb{P}(X = k) = e^{-10} \left(\frac{10^8}{8!} + \frac{10^9}{9!} + \frac{10^{10}}{10!} + \frac{10^{11}}{11!} + \frac{10^{12}}{12!} \right) \approx 0.57.$$

Ejercicio 5. [**4 puntos**]

Demostrar el teorema de Bayes: sea P una probabilidad definida en Ω y sean $B_1, \ldots, B_n$ eventos con probabilidad positiva, incompatibles dos a dos y tales que $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$. Sea A un evento con probabilidad positiva. Entonces

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i)} \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Solución:

De la definición de probabilidad condicional, tenemos que

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(B_k \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Por otro lado, las hipótesis implican que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i),$$

de donde (usando que los conjuntos B_i son disjuntos) deducimos

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i).$$

Luego

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(B_k)\mathbf{P}(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i)}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 6. [**4 puntos**]

Se considera una urna que contiene 10 bolillas de las cuales 5 son rojas. Se extraen sin reposición tres bolillas. Para $i = 1, 2, 3$, se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima extracción es una bolilla roja,} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\mathbf{E}(X_i X_j)$ para $i, j = 1, 2, 3$ y $\mathbf{E}\left((X_1 + X_2 + X_3)^2\right)$.

Solución:

- Si $i = j$, $\mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}\left(X_i^2\right) = 1^2 \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
- Si $i \neq j$, como las variables X_i y X_j son Bernoullis, $\mathbf{E}(X_i X_j) = 1 \times \mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1)$, ya que es en el único caso que $X_i X_j = 1$. En el resto de los casos la multiplicación da 0. Además tenemos que

  $$\mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbf{P}(X_j = 1|X_i = 1)\mathbf{P}(X_j = 1) = \frac{4}{9}\frac{5}{10},$$

  de donde $\mathbf{E}(X_i X_j) = \frac{2}{9}$.

Calculemos ahora $\mathbf{E}\left((X_1 + X_2 + X_3)^2\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left((X_1 + X_2 + X_3)^2\right) &= \mathbf{E}\left(X_1^2\right) + \mathbf{E}\left(X_2^2\right) + \mathbf{E}\left(X_3^2\right) + 2(\mathbf{E}(X_1 X_2) + \mathbf{E}(X_2 X_3) + \mathbf{E}(X_1 X_3)) \\ &= 3\mathbf{E}\left(X_1^2\right) + 6\mathbf{E}(X_1 X_2) = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$