Universidad de la República — **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL — **Curso 2do semestre 2017**

Primer Parcial – 26 de Septiembre 2017

El parcial dura 3 horas y se puede utilizar material (no digital).

Ejercicio 1 [**6 puntos**]
Un avión con 3 motores puede volar si sus dos motores laterales funcionan o si su motor central funciona. Estos motores funcionan con independencia total. La tasa con que falla cada motor lateral es $p_1 = 0,1$ y la tasa con que falla el motor central es $p_2 = 0,01$.

Calcule la probabilidad de que el avión no pueda volar.

Ejercicio 2 [**6 puntos**]
Se dispone de un dado cuyas caras están marcadas con 1, 1, 1, 2, 2, 3 y una urna que contiene dos bolas blancas y tres bolas negras.

El dado se lanza dos veces y se considera la suma **S** de los puntos obtenidos. Si **S** es par se extraen dos bolas con reposición de la urna y si **S** es impar las dos bolas se extraen sin reposición.

Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras.

Ejercicio 3 [**6 puntos**]
La presión de aire volcada por una máquina infladora de pelotas de fútbol sigue una distribución normal con valor medio de $1,8$ atmósfera y desviación estandar de $0,1$ atmósfera. Se sabe que la pelota es defectuosa si la presión de aire en ella es mayor a 2 atmósferas o menor a $1,6$ atmósfera.

Se seleccionan 10 pelotas al azar. Si 2 de ellas (o más) son defectuosas se desecha el lote para la venta. Calcule la probabilidad de desechar el lote.

Ejercicio 4 [**8 puntos**]
Sean X e Y dos variables aleatorias discretas tales que:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{10} & \text{si } x = 1 \text{ e } y = 1 \text{ ó } 2 \\ K & \text{si } x = 2 \text{ e } y = 1 \text{ ó } 2 \end{cases}$$

(i.e. $Rec(X) = Rec(Y) = \{1, 2\}$).

a) Halle K.
b) ¿Son X e Y independientes? Justifique.
c) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY)$ y $\mathrm{Var}(X)$

Ejercicio 5 [**8 puntos**]
La siguiente tabla muestra la altura de 10 mujeres (M) y 10 hombres (H) que realizaron el curso de Probabilidad y Estadística el semestre anterior:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	158	170	170	163	165	168	170	165	167	164
H	173	173	183	180	186	174	184	183	178	182

a) Realice un histograma para M y H de cuatro intervalos de igual longitud.
b) Calcule la media, mediana, primer cuartil, tercer cuartil y desvío éstandar para M y H. Escriba la definición de cuartiles que va a utilizar.
c) Realice un diagrama de caja (boxplot) para M y para H.

Ejercicio 6 [**6 puntos**] **Preguntas conceptuales.**

a) Si A y B son sucesos independientes y B y C también son sucesos independientes. ¿Puede afirmarse que A y C son independientes? En caso afirmativo demuestre, en caso contrario de un contraejemplo.
b) Sea X tal que $\mathbb{E}(X) = 0$ y $\mathrm{Var}(X) = 1$. Indique, justificando, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
  - $\mathbb{E}(X^2) = 1$.
  - Sea $Y \sim \mathrm{Ber}(1/2)$ entonces $\mathbb{E}(X + 4Y) = 3$ y $\mathrm{Var}(4Y) = 4$.

Solución 1 Si llamamos $L_1 =$ "el motor lateral 1 no funciona", $L_2 =$ "el motor lateral 2 no funciona" y $C =$ "el motor central no funciona", el avión no podrá volar si ocurre el suceso $(L_1 \cup L_2) \cap C$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left((L_1 \cup L_2) \cap C\right) &= \mathbb{P}\left(L_1 \cup L_2\right) \mathbb{P}\left(C\right) \\ &= \left(\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(L_2) - \mathbb{P}(L_1 \cap L_2)\right) \mathbb{P}\left(C\right) \\ &= \left(p_1 + p_1 - p_1^2\right) p_2 = (0{,}1 + 0{,}1 - 0{,}01)0{,}01 = 0{,}0019 \end{aligned}$$

Solución 2 Sean d_1 y d_2 los valores que salen en el dado la primera y segunda vez. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{"S es par"}) &= \mathbb{P}(d_1 = 1;\, d_2 = 1) + \mathbb{P}(d_1 = 1;\, d_2 = 3) + \mathbb{P}(d_1 = 2;\, d_2 = 2) \\ &+ \mathbb{P}(d_1 = 3;\, d_2 = 1) + \mathbb{P}(d_1 = 3;\, d_2 = 3) \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Observar que si X es la variable aleatoria que cuenta la cantidad de bolillas negras, entonces:

- si S es par, $X \sim Bin(n = 2, p = \frac{3}{5})$;
- si S es impar, $X \sim Hiper(N = 5, n = 3, k = 2)$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{"las dos bolas extraídas son negras"}) &= \mathbb{P}(X = 2) \\ &= \mathbb{P}(X = 2 |\text{ S es par})\mathbb{P}(\text{S es par}) \\ &+ \mathbb{P}(X = 2 |\text{ S es impar})\mathbb{P}(\text{S es impar}) \\ &= \frac{9}{25}\frac{5}{9} + \frac{3}{10}\frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Solución 3 Calculemos en primer lugar la probabilidad de que la pelota sea defectuosa. Si $V \sim \mathbf{N}\left(1{,}8, (0{,}1)^2\right)$ es la presión de aire volcada dentro de la pelota, la pelota es defectuosa si $V > 2$ o $V < 1{,}6$.

Entonces la probabilidad p de ser defectuosa es:

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}([V > 2] \cup [V < 1{,}6]) = \mathbb{P}\left(V > 2\right) + \mathbb{P}\left(V < 1{,}6\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{V - 1{,}8}{0{,}1} > \underbrace{\frac{2 - 1{,}8}{0{,}1}}_{2}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{V - 1{,}8}{0{,}1} < \underbrace{\frac{1{,}6 - 1{,}8}{0{,}1}}_{-2}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) \\ &= 2 - 2 \times 0{,}9772 = 0{,}045\,6 \end{aligned}$$

Si X es la variable aleatoria que cuenta la cantidad de pelotas defectuosas entonces $X \sim Bin(10, p)$ y la probabilidad de desechar un lote es:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X \geq 2\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(X = 0\right) - \mathbb{P}\left(X = 1\right) \\ &= 1 - \left(1 - p\right)^{10} - 10p\left(1 - p\right)^{9} \\ &= 0{,}0733 \end{aligned}$$

Solución 4 *a*) $1 = p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,2) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + K + K = \frac{1}{2} + 2K$ y por lo tanto $K = \frac{1}{4}$.

La función de probabilidad puntual de (X, Y) es:

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) Hallemos las funciones de probabilidad puntuales de X e Y :

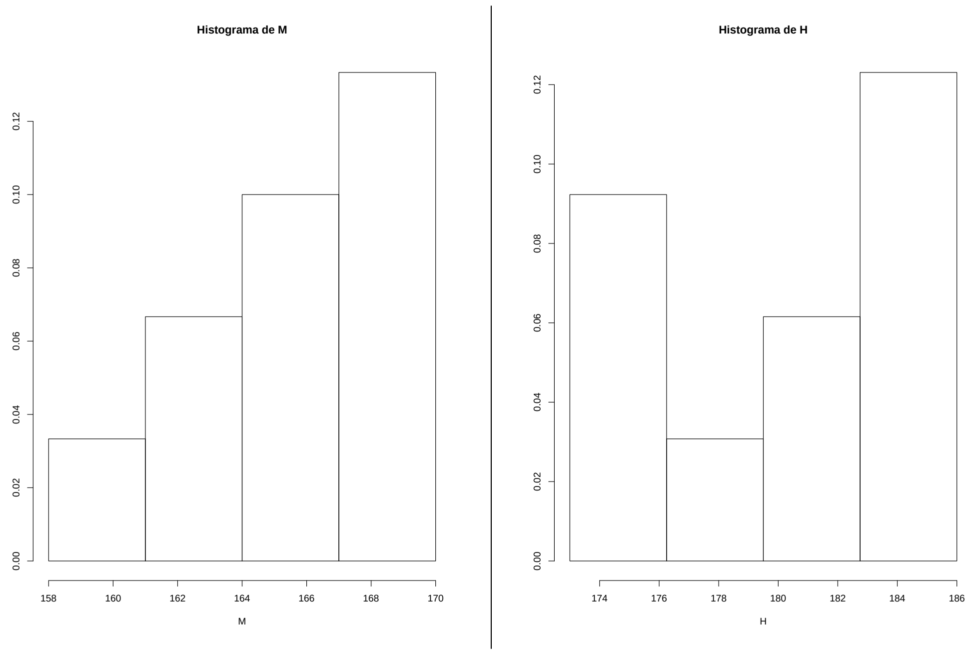
x	1	2
$p_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	1	2
$p_Y(y)$	$\frac{9}{20}$	$\frac{11}{20}$

X e Y no son independientes pues $\frac{2}{10} = p_{X,Y}(1,1) \neq p_X(1)p_Y(1) = \frac{1}{2}\frac{9}{20} = \frac{9}{40}$.

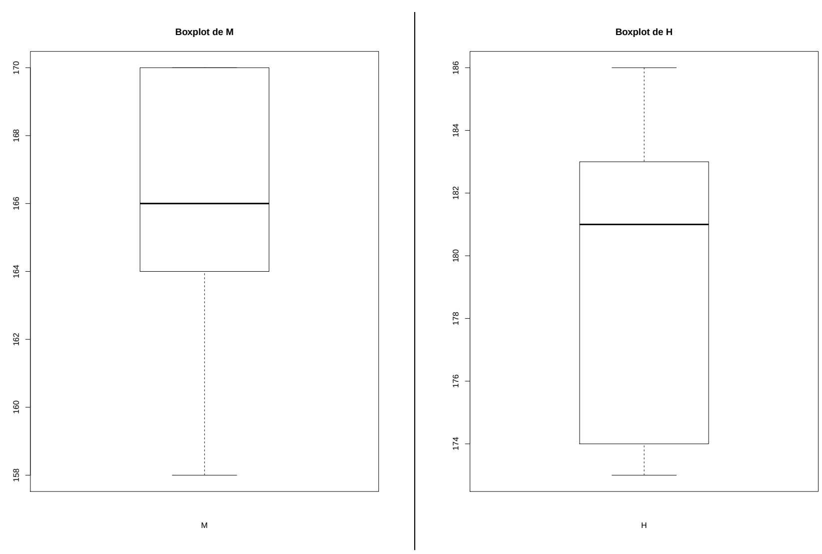
c)
- $\mathbb{E}(X) = 1\mathbb{P}(X=1) + 2\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 1{,}5$
- $\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X=x; Y=y) = 2{,}3$
- $\mathbb{E}(X^2) = 2{,}5 \to var(X) = 2{,}5 - (1{,}5)^2 = 0{,}25$

Solución 5 *a*) Cada uno de los cuatro intervalos tiene que tener longitud $\frac{max-min}{4}$. Estos son los histogramas de M y H:



b) Sea $q_1^M = \text{ínf}\{x : F_n(x) \geq 0{,}25\}$ (análogamente se definen la mediana y el tercer cuartil).
- $mediana(M) = 165$, $q_1^M = 164$, $q_3^M = 170$, $s_M = 3{,}83$
- $mediana(H) = 180$, $q_1^H = 174$, $q_3^H = 183$, $s_H = 4{,}84$.

c) En ambos casos, $L_{inf} = q_1 - 1{,}5 \times RI < min$ y $L_{sup} = q_3 + 1{,}5 \times RI > max$, por lo que:



Solución del 6. *a*) FALSO. Por ejemplo tomar A, B y C tales que:

- $A \cup C = \Omega$, $A \cap C = \emptyset$
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $\mathbb{P}(C \cap B) = \frac{1}{4}$

Entonces A y B son independientes, B y C son independientes, pero A y C no lo son.

b)

- VERDADERO, pues: $\mathbf{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, luego: $1 = \mathbb{E}(X^2) - 0$.
- Usando la linealidad de la esperanza, $\mathbb{E}(X + 4Y) = \mathbb{E}(X) + 4\mathbb{E}(Y) = 0 + 4\frac{1}{2} = 2$ (FALSO) y $\mathbf{var}(4Y) = 16\mathbf{var}(Y) = 16 \times \frac{1}{4} = 4$ (VERDADERO).