Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

PRIMER PARCIAL - SOLUCIÓN
SÁBADO 29 DE ABRIL 2017.

Ejercicio 1. [**18 puntos**] Se tienen tres dados equilibrados A, B y C, de tres caras cada uno, y cuyas caras presentan los siguientes dígitos:

A: 2, 6, 7
B: 1, 5, 9
C: 3, 4, 8

Llamemos X_A, X_B y X_C el resultado de lanzar el dado A, B y C respectivamente.

1. Calcular las probabilidades $\mathbf{P}(X_A > X_B)$, $\mathbf{P}(X_B > X_C)$ y $\mathbf{P}(X_C > X_A)$.
2. Dos personas juegan al siguiente juego: el primer jugador elige uno de los tres dados y el segundo elige uno de los dos dados restantes. Los dados se lanzan y gana el jugador que obtenga el resultado más grande.
   a) Si fueras el segundo jugador, y el primer jugador elige el dado B, ¿qué dado eligirías y por qué?
   b) Asumiendo que el segundo jugador maximiza sus chances de ganar: si fueras el primer jugador ¿qué dado eligirías y por qué?
3. Ahora los jugadores juegan con la siguiente modalidad: el primer jugador elige un dado, y al segundo jugador se le asigna uno de los dos dados restantes al azar con igual probabilidad.
   a) Calcular la probabilidad de que gane el primer jugador si elige el dado A, B, y C respectivamente.
   b) ¿Qué dado eligirías si fueras el primer jugador?
   c) Supongamos que el primer jugador elige el dado al azar con probabilidades iguales.
      1) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el primer jugador?
      2) Sabiendo que el primer jugador ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido el dado A?
4. Se considera ahora solo los dados A y B. Los jugadores deciden jugar un juego diferente con la siguientes reglas: el primero elige un dado y el segundo juega con el restante. Luego, los jugadores lanzan dos veces cada dado y registran el máximo de los resultados obtenido. Nuevamente gana el que obtiene el resultado más grande. Llamemos Y_A, Y_B al valor máximo de tirar dos veces el dado A y B respectivamente.
   a) Calcular y representar gráficamente la función de probabilidad puntual de Y_A y de Y_B.
   b) Calcular los valores esperados $\mathbf{E}(Y_A)$ y $\mathbf{E}(Y_B)$. ¿Qué dado eligirías en este caso, si fueras el primer jugador?
   c) Calcular el valor esperado de $Y_A + Y_B$.

Ejercicio 1. Solución

1. Hay varias maneras de calcularlas. Una de ellas es la siguiente, donde se usa la independencia de los dados y por lo tanto de X_A, X_B y X_C.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_A > X_B) &= \mathbb{P}(X_A = 2; X_B = 1) + \mathbb{P}(X_A = 6; X_B = 5) + \mathbb{P}(X_A = 6; X_B = 1)\\ &+ \mathbb{P}(X_A = 7; X_B = 1) + \mathbb{P}(X_A = 7; X_B = 5)\\ &= 5 \times \frac{1}{3^2} = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

Análogamente, $\mathbb{P}(X_B > X_C) = \mathbb{P}(X_C > X_A) = \frac{5}{9}$.
Otra manera es pensar en una tabla con los posibles resultado de por ejemplo A y B y marcar los casos en que $X_A > X_B$:

X_B / X_A	2	6	7
1	si	si	si
5	no	si	si
9	no	no	no

Por lo tanto $X_A > X_B$ en 5 casos de 9 (y son todos equiprobables), por lo tanto $\mathbb{P}(X_A > X_B) = \frac{5}{9}$. Lo mismo para los otros casos.

2. Llamémosle J_1 a la elección del primer jugador y J_2 a la elección del segundo jugador.

   a) Si $J_1 = B$, entonces al segundo jugador le conviene elegir el dado A (es decir que $J_2 = A$) ya que $\mathbb{P}(X_A > X_B) > \mathbb{P}(X_C > X_B)$.

   b) Asumiendo que el segundo jugador maximiza sus chances de ganar, razonamos igual que en la parte anterior y obtenemos:

   - si $J_1 = A$ entonces $J_2 = C$, luego $\mathbb{P}(\text{Gana el jugador } 1|J_1 = A; J_2 = C) = \mathbb{P}(X_A > X_C) = 4/9$.
   - si $J_1 = B$ entonces $J_2 = A$, luego $\mathbb{P}(\text{Gana el jugador } 1|J_1 = B; J_2 = A) = \mathbb{P}(X_B > X_A) = 4/9$.
   - si $J_1 = C$ entonces $J_2 = B$, luego $\mathbb{P}(\text{Gana el jugador } 1|J_1 = C; J_2 = B) = \mathbb{P}(X_C > X_B) = 4/9$.

   Es decir que en todos los casos la probabilidad de que gane el jugador 1 *dado que el jugador 2 elige para ganar* es la misma $(\frac{4}{9})$. Por lo tanto, da lo mismo que el jugador 1 elija cualquier dado.

3. *a*) Consideremos el caso $J_1 = A$, esto es el jugador 1 eligió el dado A, y llamemos G_1 al suceso "Gana el Jugador 1". Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_1) &= \mathbb{P}(G_1|J_2 = B) \times \mathbb{P}(J_2 = B) + \mathbb{P}(G_1|J_2 = C) \times \mathbb{P}(J_2 = C) \\ &= \mathbb{P}(X_A > X_B) \times \mathbb{P}(J_2 = B) + \mathbb{P}(X_A > X_C) \times \mathbb{P}(J_2 = C) \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Análogamente:

   - Si $J_1 = B$, entonces $\mathbb{P}(G_1) = 1/2$.
   - Si $J_1 = C$, entonces $\mathbb{P}(G_1) = 1/2$.

   b) De la parte anterior podemos observar que la probabilidad de que gane el primer jugador es siempre $\frac{1}{2}$, sin importar el dado que elija. Por lo tanto, nuevamente da lo mismo elegir cualquier dado. Observar además que ahora la probabilidad de ganar es más alta que en la parte 2 ya que ahora el segundo jugador no puede elegir *para ganar* sino que elige al azar.

   c) Supongamos que el primer jugador elige el dado al azar con probabilidades iguales.

   1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_1) &= \mathbb{P}(G_1|J_1 = A) \times \mathbb{P}(J_1 = A) + \mathbb{P}(G_1|J_1 = B) \times \mathbb{P}(J_1 = B) + \mathbb{P}(G_1|J_1 = C) \times \mathbb{P}(J_1 = C) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   2)

$$\mathbb{P}(J_1 = A|G_1) = \frac{\mathbb{P}(G_1|J_1 = A) \times \mathbb{P}(J_1 = A)}{\mathbb{P}(G_1)} = \frac{1}{3}$$

4. *a*) Sean X_A^1, X_A^2, X_B^1 y X_B^2 las dos salidas del dado A y B respectivamente. Observar que X_A^1, X_A^2, X_B^1 y X_B^2 son independientes. Las variables Y_A e Y_B son el valor más grande de las dos tiradas, es decir: $Y_A = \text{máx}\{X_A^1, X_A^2\}$ e $Y_B = \text{máx}\{X_B^1, X_B^2\}$.
   Los posibles valores de Y_A dependen de los resultados de X_A en las dos tiradas. Los posibles resultados son:

X_A^1/X_A^2	2	6	7
2	2	6	7
6	6	6	7
7	7	7	7

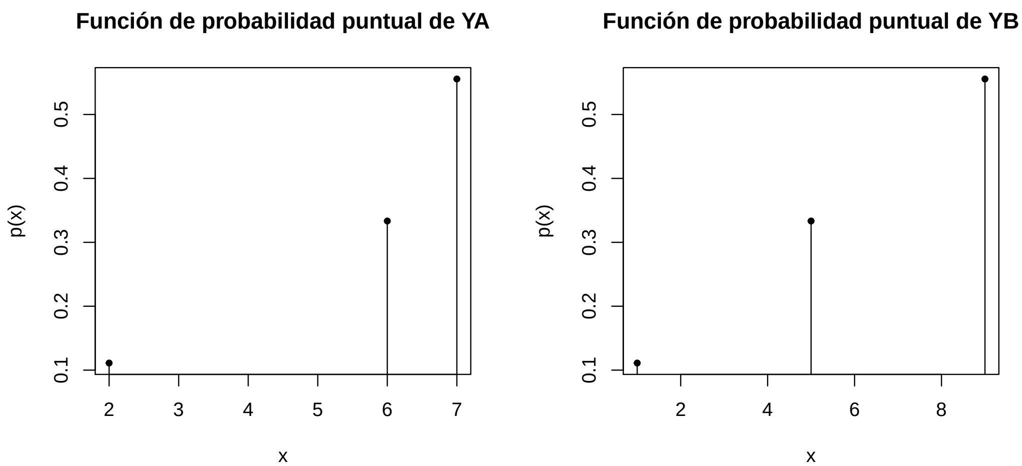
   Luego, $\mathcal{R}_{Y_A} = \{2, 6, 7\}$ y la función de probabilidad puntual está dada por:

   - $\mathbb{P}(Y_A = 2) = \mathbb{P}(X_A^1 = 2; X_A^2 = 2) = (\frac{1}{3})^2 = 1/9$.
   - $\mathbb{P}(Y_A = 6) = 3 \times (\frac{1}{3})^2 = 1/3$.
   - $\mathbb{P}(Y_A = 7) = 5 \times (\frac{1}{3})^2 = 5/9$.

Análogamente:

X_B^1/X_B^2	1	5	9
1	1	5	9
5	5	5	9
9	9	9	9

Luego, $\mathcal{R}_{Y_B} = \{1, 5, 9\}$ con $\mathbb{P}(Y_B = 1) = \frac{1}{9}$, $\mathbb{P}(Y_B = 5) = \frac{3}{9}$ y $\mathbb{P}(Y_B = 9) = \frac{5}{9}$.
En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones de probabilidad puntual de Y_A y Y_B:



b)

$$\mathbb{E}(Y_A) = 2 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{3}{9} + 7 \times \frac{5}{9} = \frac{55}{9}.$$

$$\mathbb{E}(Y_B) = 1 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{3}{9} + 9 \times \frac{5}{9} = \frac{61}{9}.$$

Por lo tanto conviene elegir el dado B.

c) $\mathbb{E}(Y_A + Y_B) = \frac{55}{9} + \frac{61}{9} = \frac{116}{9}$.

Ejercicio 2. [**12 puntos**] Un curso que se dicta regularmente es de asistencia obligatoria. Un estudiante reprueba automáticamente en caso de faltar a 5 sesiones o más. El porcentaje histórico de reprobaciones por faltas es de 40 %. El responsable del curso, propone un incentivo para reducir este porcentaje. Para verificar la eficacia del incentivo propone una prueba piloto con 5 estudiantes, de los cuáles ninguno reprobó por faltas. Esto lo convece de que el incentivo ha dado resultado. Sin embargo, un colega afirma que el incentivo no tiene efecto sobre las reprobaciones por faltas.

1. Para intentar refutar la afirmación del colega, el responsable propone un modelo en que la probabilidad de que un estudiante repruebe por faltas es de 0,4, que los estudiantes faltan de manera independiente, y define X la variable aleatoria que cuenta el número reprobaciones por faltas en la muestra de 5 estudiantes.

   a) Hallar la función de probabilidad puntual de X.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna reprobación por faltas? ¿Cuál es el número esperado de reprobaciones por faltas?

   c) Aplicando un razonamiento por improbable ¿cuál es su opinión sobre la afirmación del colega?

2. Viendo los resultados de la prueba anterior, el responsable decide realizar una nueva prueba piloto en las mismas condiciones que la prueba anterior pero con una muestra más grande que incluye a 80 estudiantes. Los resultados obtenidos se indican en la siguiente tabla:

   Sea como antes, X la variable aleatoria que cuenta el número de reprobaciones por faltas en esta nueva muestra.

   a) Reconocer la distribución de X e indicar su valor esperado.

Número de faltas	Cantidad de estudiantes
0	8
1	13
2	11
3	9
4	12
5	11
6	6
7	5
≥ 8	5

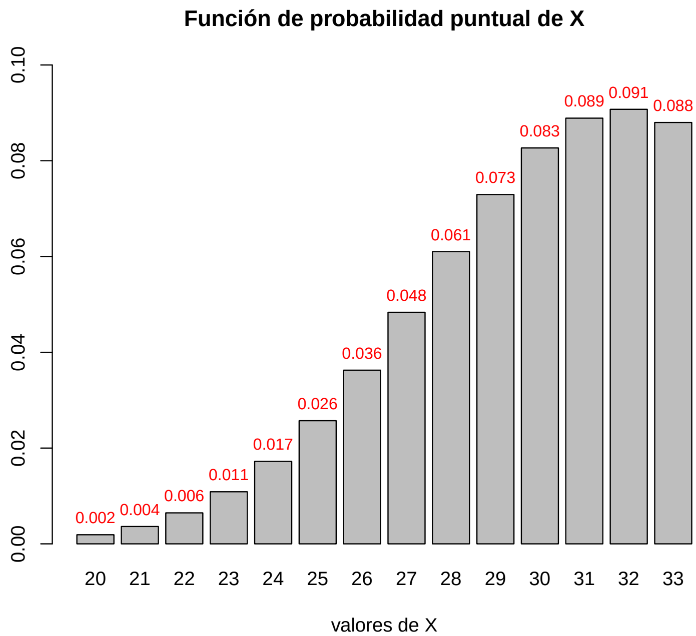


Figura 1: Función de probabilidad puntual de X para algunos valores representativos

b) Nuevamente razonando por improbable, indicar cuál es la conclusión respecto a la afirmación del colega. ¿Coincide con la respuesta de la parte anterior?

En la figura 1 se muestra la función de probabilidad puntual de X para algunos valores representativos que pueden ser de utilidad.

Ejercicio 2. Solución

1. *a*) Dado que los alumnos reprueban por faltas de manera independiente y con probabilidad $p = 0{,}4$, si definimos la variable aleatoria X que cuenta la cantidad de reprobaciones por faltas en $n = 5$ alumnos, resulta que X tiene distribución Binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0{,}4$.

   Por lo tanto $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función de probabilidad puntual es:

$$p_X(i) = \mathbb{P}(X = i) = C_i^5 0{,}4^i (1 - 0{,}4)^{5-i} \quad \forall\, i \in \mathcal{R}_X.$$

   b) La probabilidad de que no haya ninguna reprobación por faltas entre los 5 alumnos es igual a:

$$p_X(0) = P(X = 0) = C_0^5 0{,}4^0 (1 - 0{,}4)^{5-0} = 0{,}6^5 = 0{,}07776.$$

   El valor esperado de reprobaciones por faltas entre los 5 alumnos es igual a $\mathrm{E}(X)$. Para una variable aleatoria Binomial sabemos que $\mathrm{E}(X) = np$, con lo cual $\mathrm{E}(X) = 5 \cdot 0{,}4 = 2$.

   c) La afirmación que se desea refutar es:

“ El incentivo no tiene efecto sobre las reprobaciones por faltas”.

Asumiendo dicha afirmación como verdadera, tenemos que el número de reprobaciones por faltas es $X \sim \text{Bin}(5, 0{,}4)$. Por lo tanto, la probabilidad de observar algo tanto o más extremo que 0 reprobaciones es $\mathbb{P}(X \leq 0) = P(X = 0) = 0{,}07776$. Con lo cual parece improbable que el valor $p = 0{,}4$ sea cierto para el grupo de 5 alumnos y por ende el incentivo probablemente haya funcionado. La evidencia permite refutar la afimación del colega.

2. *a*) El mismo argumento usado en la parte 1.(a) justifica el uso de la distribución $\text{Bin}(n, p)$ para la variable X de esta parte. Los parámetros en este caso son $n = 80$ y $p = 0{,}4$.

   El valor esperado de X se obtiene como $\text{E}(X) = np = 80 \cdot 0{,}4 = 32$.

   b) La afirmación que se desea refutar es nuevamente:

   “ El incentivo no tiene efecto sobre las reprobaciones por faltas”.

   Asumiendo dicha afirmación como verdadera, nuevamente tenemos que el número de reprobaciones por faltas es $X \sim \text{Bin}(80, 0{,}4)$.

   El número de reprobaciones observado en este caso se obtiene de la tabla: $11 + 6 + 5 + 5 = 27$ estudiantes tuvieron 5 o más faltas y por lo tanto reprobaron automáticamente. La probabilidad de observar algo tanto o más extremo que 27 reprobaciones es $P(X \leq 27) = \sum_{i=0}^{27} p_X(i)$.

   De la gráfica dada con la probabilidad puntual podemos obtener los valores de $p_X(i)$ con $i = 20, 21, ..., 27$. Estimamos la probabilidad buscada sumando estos valores y reconociendo que la probabilidad de los valores con $i = 0, 1, 2, ..., 19$ tienen un peso despreciable en la probabilidad que buscamos:

   $$P(X \leq 27) = 0{,}002 + 0{,}004 + 0{,}006 + 0{,}011 + 0{,}017 + 0{,}026 + 0{,}048 = 0{,}15.$$

   Esta probabilidad no es particularmente pequeña, por lo tanto en este caso no tenemos evidencia suficiente para refutar la afirmación del colega. Esto no coincide con la respuesta de la parte anterior.

Ejercicio 3. [**10 puntos**] Dos estudiantes de probabilidad Ana (A) y Bernardo (B) juegan al siguiente extraño juego: se elige por única vez al azar un número μ que puede ser 0 o 1,con probabilidad 1/3 y 2/3 respectivamente. Una vez elegido μ, este queda **fijo** para el resto del juego. Luego, se sortea una variable X con distribución normal $N(\mu, 1)$. A gana un punto si $X \leq 0$, y si $X > 0$ B gana un punto. Se han jugado 4 turnos y tanto A como B tienen 2 puntos cada uno (D).

1. Sea D el evento “se juegan cuatro turnos y tanto A como B tienen 2 puntos cada uno”. Calcular $\mathbf{P}(D)$.
2. Calcular las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(\mu = 1|D)$ y $\mathbf{P}(\mu = 0|D)$. Si tuvieras que adivinar con qué valor de μ están jugando, ¿cuál eligirías y por qué?

Ejercicio 3. Solución

1. Utilizando la fórmula de probabilidad total:

   $$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|\mu = 0)\mathbb{P}(\mu = 0) + \mathbb{P}(D|\mu = 1)\mathbb{P}(\mu = 1)$$

   Sea $p = \mathbb{P}(X \leq 0|\mu = 0) = \frac{1}{2}$, entonces es posible considerar la variable aleatoria $Y \sim \text{Bin}(4, p)$ que cuenta los puntos ganados por A en los 4 turnos. Así,

   $$\mathbb{P}(D|\mu = 0) = \mathbb{P}(Y = 2) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}375.$$

   Razonando de forma análoga para $\mu = 1$ tenemos que:

   $$p = \mathbb{P}(X \leq 0|\mu = 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{1} \leq \frac{0-1}{1}\Big|\mu = 1\right) = \mathbb{P}(Z \leq -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413.$$

   $$\mathbb{P}(D|\mu = 1) = 6(0{,}1587)^2(0{,}8413)^2 = 0{,}1070$$

   Finalmente

   $$\mathbb{P}(D) = 0{,}375 \times \frac{1}{3} + 0{,}107 \times \frac{2}{3} = 0{,}1963.$$

2. Aplicando la fórmula de Bayes tenemos:

$$\mathbb{P}(\mu = 1|D) = \frac{\mathbb{P}(D|\mu = 1)\mathbb{P}(\mu = 1)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0{,}1070 \times \frac{2}{3}}{0,1963} = 0,363.$$

$$\mathbb{P}(\mu = 0|D) = 1 - \mathbb{P}(\mu = 1|D) = 1 - 0{,}363 = 0{,}637.$$

Entonces eligiría $\mu = 0$ por ser el que tiene mayor probabilidad dado el suceso ocurrido.