Universidad de la República | **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo semestre 2015**

PRIMER PARCIAL
MIÉRCOLES 7 DE OCTUBRE DE 2015

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

Ejercicio 1. Un aficionado a la meteorología decide crear su propio modelo para predecir lluvias. El mismo asume que la probabilidad de que un cierto día llueva está determinada únicamente por lo sucedido el día anterior (si llovió o no). De este modo se tiene que sabiendo que un día llovió, la probabilidad de que al día siguiente llueva es de 0.55, mientras que dado que un día no llovió la probabilidad de que al día siguiente llueva es de 0.3.

1. (a) Sabiendo que un día llovió, hallar la probabilidad de que al día siguiente no llueva.
   (b) Sabiendo que un día no llovió, hallar la probabilidad de que al día siguiente no llueva.
2. De ahora en más sabemos también que en el día presente (día 0) no llovió.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva en los días 1 y 2 (es decir, en ambos días)?
   (b) Calcular la probabilidad de tener una racha de k días lluviosos consecutivos.

Ejercicio 1. Solución

1. (a) $P(\text{un día no llueva}|\text{el día anterior llovió }) = 1 - 0.55 = 0.45$.
   (b) $P(\text{un día no llueva}|\text{el día anterior no llovió }) = 1 - 0.3 = 0.7$.
2. (a)

$$P(\text{llueva los días 1 y 2}) =$$
$$P(\text{llueva el día 2}|\text{llueve el día 1})P(\text{llueva el día 1}|\text{no llovió el día 0})P(\text{llueva el día 0})$$
$$= 0.55 \times 0.3 \times 1 = 0.165$$

   (b) La probabilidad de tener una racha de k días lluviosos consecutivos es:

$$P(A_k \cap ... \cap A_1 \cap A_0^c)$$

Siendo A_i el suceso " lovió en el día i" Luego, por probabilidad condicional y la condición de dependencia respecto al día anterior, se tiene que:

$$P(A_k \cap ... \cap A_1 \cap A_0^c) = P(A_k|A_{k-1})P(Ak-1|A_{k-2})...P(A_1|A_0^c)P(A_0^c) = 0.55^{k-1} \times 0.3 \times 1$$

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria real cuya función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} ae^{2x} & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$ constante positiva.

1. (a) Hallar a para que X sea absolutamente continua. Hallar la función de densidad f_X.
   (b) Hallar a para que se cumpla $P(X < 0) = 1/4$.
2. Asumimos ahora que $a = \frac{1}{4}$:
   (a) Calcular $P(X = 0)$ y $P(X = 1)$.
   (b) Calcular $P(X \in [-2, 0])$ y $P(X > 2)$.

Ejercicio 2. Solución

1. (a) Observando que F_X es continua en todo punto salvo en el 0 que no podemos afirmarlo pues depende del valor de a, para que X sea absolutamente continua, basta imponer la continuidad en ese punto, es decir imponer que los límites por izquierda y derecha coincidan. Por definición se tiene que:

$$F_X(0^-) = ae^{2\cdot 0} = a \quad \text{mientras que} \quad F_X(0) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 0} = \frac{1}{2}$$

   Por lo tanto $a = \frac{1}{2}$. Además, derivando $F_X(x)$ se obtiene $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   (b) $\frac{1}{4} = P(X < 0) = \lim_{x \to 0^-} F_X(x) = ae^{2\cdot 0} = a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

2. (a) $P(X = 0) = F_X(0) - \lim_{x \to 0^-} F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 0} - \frac{1}{4}e^{2\cdot 0} = \frac{1}{4}$
   $P(X = 1) = 0$ porque F_X es continua para todo $x \neq 0$.
   (b) $P(X \in [-2, 0]) = F_X(0) - F_X(-2) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 0} - \frac{1}{4}e^{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-4}$.
   $P(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - \frac{1}{2}e^{-2\cdot 2}) = \frac{1}{2}e^{-4}$.

Ejercicio 3.

1. Una pareja decide tener hijos hasta tener una nena. La probabilidad de tener una nena es 1/2 y es independiente del género del hijo anterior. Sea X el número de hijos de la pareja (nenas y varones).
   (a) Hallar la función de probabilidad de X, esto es $P(X = k)\ \forall\, k \in \mathcal{R}_X$.
   (b) Sabiendo que la pareja ya tuvo dos hijos varones, la probabilidad de que el próximo hijo sea nena ¿es mayor, menor o igual a la probabilidad de tener una nena en el primer intento? Comente en este caso la validez de la expresión "La tercera es la vencida". [1]
2. Luego de recapacitar, la pareja decide tener hijos hasta tener una nena o hasta tener 5 hijos.
   (a) En este caso, hallar $\mathcal{R}_X$ y la función de probabilidad de X.

[1] El comentario es por un punto extra

(b) Graficar F_X función de distribución de X.

(c) Sea N el número de hijas de la pareja. Hallar $\mathcal{R}_N$ y la función de probabilidad de N.

Ejercicio 3. Solución

1. (a) X sigue una distribución Geométrica de parámetro $p = P(\text{tener una nena}) = 1/2$. Por lo tanto $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \ \forall\, k \in \mathcal{R}_{\mathcal{X}} = \{k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$.

   (b) Se pide calcular $P(X = 3|X > 2)$. Usando la definición de probabilidad condicional y la función de probabilidad de X, se tiene que:

$$P(X = 3|X > 2) = \frac{P(X = 3, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X = 3)}{P(X > 2)} = \frac{(1-p)^2 p}{(1-p)^2} = p = \frac{1}{2}$$

   Por lo tanto, la probabiliad de que el próximo hijo sea nena sabiendo que la pareja ya tuvo dos varones es IGUAL que la probabilidad de tener una nena en el primer intento. Por lo tanto la expresión "La tercera es la vencida" en este caso es completamente falsa, pues la información de ya haber tenido dos hijos varones no aumenta la probabilidad de tener una nena en el tercer intento.

2. (a) En este caso $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función de probabilidad de X coincide con la distribución de la parte anterior para $k = 1, 2, 3, 4$, es decir:

$$P(X = 1) = p = \frac{1}{2}$$
$$P(X = 2) = (1-p)p = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 3) = (1-p)^2 p = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 4) = (1-p)^3 p = \frac{1}{16}$$
$$P(X = 5) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

   (b) La función de distribución de X es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1, \\ \frac{1}{2} \text{ si } 1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4} \text{ si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{7}{8} \text{ si } 3 \leq x < 4, \\ \frac{15}{16} \text{ si } 4 \leq x < 5, \\ 1 \text{ si } x \geq 5. \end{cases}$$

   La gráfica de F_X será entonces una "escalera" con saltos en $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la altura del salto en x es $P(X = x)$.

   (c) $\mathcal{R}_N = \{0, 1\}$ pues o bien tuvieron 5 hijos varones en cuyo caso no tuvieron ninguna nena, o bien tuvieron una nena y ahí pararon de tener hijos. Se tiene entonces que:

$$P(N = 0) = P(\text{ 5 hijos varones}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \quad \text{y} \quad P(N = 1) = 1 - P(N = 0) = \frac{31}{32}.$$

Ejercicio 4.

1. Se asume que una línea de ómnibus tiene una frecuencia de 15 minutos empezando a las 7:00. Un pasajero de dicha línea llega a la parada en un tiempo T aleatorio y uniforme entre las 7:00 y las 7:30, esto es:

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 7 \\ \frac{x-7}{0.30} & \text{si } 7 \leq x \leq 7.30, \\ 1 & \text{si } x \geq 7.30. \end{cases}$$

   Nota: aclaramos que en este ejercicio 1 minuto se interpreta como el valor 0.01.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero espere menos de 5 minutos?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero espere más de 10 minutos?

2. Se asume ahora que el número de ómnibus N_t que pasan en un intervalo $[0, t]$ es aleatorio y se distribuye según una distribución Poisson de parámetro λt, con $\lambda > 0$. Sea X el tiempo de espera de un pasajero que llega en un instante cualquiera (que podemos pensar como tiempo 0).

   (a) Calcular $P(X > t)$ para $t > 0$.

   (b) Deducir que X tiene distribución exponencial de parámetro λ.

   (c) En esta parte se asume que $\lambda = \frac{1}{15}$.

      i. Hallar la probabilidad de que el pasajero tenga que esperar menos de 5 minutos.

      ii. Sabiendo que un pasajero hace 10 minutos que espera, calcular la probabilidad de que tenga que esperar 5 minutos más.

Ejercicio 4. Solución

1. (a) Sabemos que los ómnibus pasan a las 7, 7:15 y 7:30. Para un pasajero que llegue entre 7 y 7:30, la probabilidad de que espere menos de 5 minutos, significa que llegó o bien entre 7:10 y 7:15 o bien entre 7:25 y 7:30, esto es $\{7,10 \leq T \leq 7,15\}$ o $\{7,25 \leq T \leq 7,30\}$ (recordar la observación sobre el modo de contar los minutos). Por lo tanto, usando que son sucesos disjuntos, se tiene que:

$$P(\text{esperar menos de 5 minutos}) = P(7,10 \leq T < 7,15) + P(7,25 \leq T < 7,30)$$

   Y usando que T tiene distribución Uniforme entre 7 y 7,30, se tiene que:

$$P(\text{esperar menos de 5 minutos}) = \frac{0,05}{0,30} + \frac{0,05}{0,30} = \frac{0,1}{0,30} = \frac{1}{3}$$

   Observar que es posible llegar al mismo resultado, usando el hecho de que por ser Uniforme, la probabilidad de pertenecer a un intervalo solo depende del largo del intervalo.

   (b) Análogamente,

$$P(\text{esperar más de 10 minutos}) = P(7,0 < T \leq 7,05) + P(7,15 < T \leq 7,20) = \frac{1}{3}$$

2. (a) La probabilidad de tener que esperar más de un tiempo t si un pasajero llegó en tiempo 0 es la probabilidad de que en el intervalo $[0, t]$ no pase ningún ómnibus, esto es $N_t = 0$. por lo tanto,

$$P(X > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

   donde en la última igualdad usamos que N_t es Poisson de parámerto λt.

(b) Es directo observar que X tiene distribución exponencial de parámetro λ, pues para todo $t > 0$ se tiene que,

$$F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

.

(c) i.

$$P(\text{esperar menos de 5 minutos}) = P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - e^{-\frac{1}{15}5} = 1 - e^{-\frac{1}{3}}$$

ii. Se pide calcular $P(X > 15|X > 10)$. Utilizando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial (o usando la defición de probabilidad condicional), se tiene que:

$$P(X > 15|X > 10) = P(X > 5) = e^{-\frac{1}{15}5} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

Nota: en esta parte es posible utilizar al igual que en la primera que 5 minutos equivale al valor 0.05.