Solución Primer Parcial PyE 2012

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	A	E	E	D

Problema 1

a) Sea $V \sim N(999, 1)$ la variable aleatoria que representa el volumen de una botella. La probabilidad de no ser apta para su venta es:

$$p = P(V > 1002) + P(V < 998) = 1 - \phi(3) + \phi(-1) = 0,16.$$

Sea Y la variable aleatoria que representa la cantidad de botellas defectuosas de las diez inspeccionadas. Puesto Y es suma de 10 variables aleatorias Bernoulli independientes con probabilidad de defecto p, tenemos que $Y \sim Bin(10, p)$. La probabilidad de descarte de un lote es entonces:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - (1 - p)^{10} - 10p(1 - p)^9 = 0,492.$$

b) Si llegara el millón de botellas a la venta la empresa ganaría 400000 dólares. Considerando la probabilidad de descarte de lotes, la ganancia se estima en $G = 400000 \times p = 203200$ dólares.

c) Si el ingeniero fuese contratado tendríamos $V \sim N(999, 0, 5^2)$, y la nueva probabilidad de descarte sería $p_1 = 1 - \phi(6) + \phi(-2) \approx 0,0228 < p$. Sustituyendo tenemos que $P(Y \geq 2) = 0,0207$, y la ganancia final de la empresa ascendería a: $G_1 = 400000 \times (1 - 0,0207) - 100000 = 291715$. El gasto debido al contrato del ingeniero se desquita con creces, y conviene realizar el contrato.

d) El segundo ingeniero lograría llevar la distribución del volumen de cada botella a $V \sim N(1000, 1)$. La probabilidad de no aptitud de una botella cambia a $p_2 = P(|V - 1000| > 2) = 2(1 - \phi(2)) = 0,0456$, y la probabilidad de descartar un lote es ahora $P(Y \geq 2) = 0,0733$. La ganancia final, en caso de contratar al segundo ingeniero (y no al primero), se estima mediante $G_2 = 400000 \times (1 - 0,0733) - 100000 = 270660$. Es preferible realizar este contrato antes que no contratar a ningún ingeniero.

e) Si contratáramos a ambos ingenieros tendríamos $V \sim N(1000, 0.5^2)$, y la probabilidad de descarte de un lote es $p_3 = P(|V - 1000| > 2) = 2(1 - \phi(4))$, prácticamente nula. La ganancia en este caso ascendería a $G_3 = 400000 - 2 \times 100000 = 200000 < G$, por lo que el contrato de ambos ingenieros es la peor opción. La decisión final es contratar al primer ingeniero, con una ganancia final estimada en $G_1 = 291715$ dólares.

Problema 2

a) Sabemos que A, B, C y D son variables aleatorias i.i.d. Bernoulli de parámetro p. Luego tanto AD como BC son Bernoulli de parámetro p^2. La probabilidad de que M no sea invertible es:

$$P(X = 0) = P(AD = BC = 1) + P(AD = BC = 0) = (p^2)^2 + (1 - p^2)^2.$$

b La probabilidad $P(X = 0)$ es suma de cuadrados. No puede anularse, porque las bases p^2 y $1 - p^2$ no pueden ser nulas simultáneamente.
Además $P(X = 0) = 1 + 2p^2(p^2 - 1)$, vale 1 si y sólo si $p = 1$ o bien $p = 0$.

c Sabemos que $R_X = \{-1, 0, 1\}$ y ya hemos calculado $P(X = 0)$. Por simetría $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1-P(X=0)}{2} = p^2(1 - p^2)$. Sustituyendo con $p = 1/4$ tenemos que $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{15}{256}$ y $P(X = 0) = 113/128$.

d La variable aleatoria X es simple y simétrica, por lo que $E(X) = 0$.
Considerando 1500 determinantes independientes, por la LFGN su promedio va a ser (considerando que 1500 es suficientemente grande) similar a su valor esperado, que es 0.

Múltiple Opción 1

Consideremos los eventos U_1: "los enlaces $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ funcionan y U_2: "los enlaces $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ funcionan". Se pide la probabilidad P de que los terminales A y C permanecen comunicados. Por construcción tenemos que:

$$P = P(U_1 \cup U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1 \cap U_2) = p^2 + p^2 - p^4.$$

Luego, la opción correcta es la *b*.

Múltiple Opción 2

Por regla del complemento, basta con hallar q, que es la probabilidad de que los niños elijan distintas porciones, y responder $p = 1 - q$. Hay arreglos de 8 en 3 maneras de elegir tres porciones diferentes, y 8^3 selecciones posibles. Luego $p = 1 - q = 1 - \frac{A_3^8}{8^3} = \frac{11}{32}$, y la respuesta correcta es la *a*.

Múltiple Opción 3

Se solicita $P(B_1/A)$. Por la regla de Bayes, tenemos que:

$$\begin{aligned} P(B_1/A) &= \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)} \\ &= \frac{0,99 \times 0,001}{0,99 \times 0,001 + 0,55 \times 0,049 + 0,10 \times 0,95} \\ &= 0,008052709. \end{aligned}$$

La probabilidad solicitada es entonces aproximadamente igual a $0,008$, y la respuesta correcta es la *e*.

Múltiple Opción 4

El apostante gana \$20 con probabilidad p y pierde \$10 con probabilidad $1-p$. Sean G_i las variables aleatorias que representan la ganancia en la apuesta i, donde $i = 1, \ldots, 200$. La ganancia total en doscientas apuestas es $G = \sum_{i=1}^{200} G_i$. Por otra parte, la ganancia esperada en una apuesta es $E(G_1) = 20p - 10(1-p) = 30p - 10$. Se sabe que la ganancia total en 200 apuestas fue de \$1000 pesos. Luego, el promedio de ganancias fue de $\overline{G_{1000}} = 5$ por jugada. Considerando que 200 es una cantidad suficientemente grande de apuestas y aplicando la Ley Fuerte, tenemos que:

$$5 = \overline{G_{200}} \cong E(G_1) = 30p - 10.$$

Despejando se obtiene que $p = \frac{1}{2}$, por lo que la respuesta correcta es la e.

Múltiple Opción 5

Calculemos primeramente la distribución de la duración de llamadas $F_X(t)$ para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leq t/\lambda = \frac{1}{10})P(\lambda = \frac{1}{10})P(X \leq t/\lambda = \frac{1}{5})P(\lambda = \frac{1}{5})+ \\ &+ P(X \leq t/\lambda = \frac{1}{2})P(\lambda = \frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{20} \times (1 - e^{-\frac{t}{10}}) + \frac{11}{20} \times (1 - e^{-\frac{t}{5}}) + \frac{6}{20} \times (1 - e^{-\frac{t}{2}}) \end{aligned}$$

Derivando se consigue la densidad $f_X(t)$ que es nula cuando $t < 0$, y cuando $t \geq 0$ vale:

$$f_X(t) = \frac{3}{20} \times \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}} + \frac{11}{20} \times \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} + \frac{6}{20} \times \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}.$$

La opción correcta es la d.