PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER PARCIAL, 5 de Mayo de 2010

Problema 1 (13 puntos)

Sean los sucesos $R =$ la cara del dado seleccionado es roja y $D_i =$ el dado seleccionado es el número i.

1. (a)

$$P(D_i|R) = \frac{P(R|D_i)P(D_i)}{P(R)} = \frac{P(R|D_i)P(D_i)}{\sum_{i=1}^{5} P(R|D_i)P(D_i)}$$

donde $P(D_i) = 1/5$, $P(R|D_i) = \frac{6-i}{6} = 1 - \frac{i}{6}$ y $P(R) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} 1 - \frac{i}{6} = 1/2$.

Entonces $P(D_i|R) = \frac{2}{5}(1 - \frac{i}{6}) = \frac{6-i}{15}$.

(b) El recorrido de la variable X es $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ donde $P(X = i) = P(D_i|R) = \frac{2}{5}(1 - \frac{i}{6})$. La función de probabilidad está dada entonces por la siguiente tabla:

X	1	2	3	4	5
p_X	1/3	4/15	1/5	2/15	1/15

A partir de ella calculamos su función de distribución:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{i:1\leq i\leq 5 \\ i\leq x}} P(X = i)$$

donde la suma da 0 si el conjunto de índices es vacio, es decir (ver Fig. 1):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 5/15 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 9/15 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 12/15 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 14/15 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

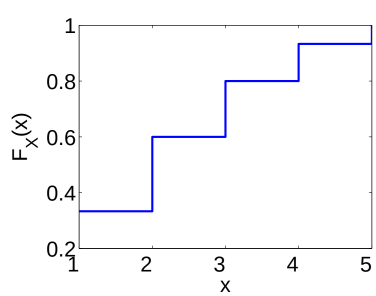

Figure 1: Función de distribución de la variable aleatoria X del Ejercicio 1.

2. La variable aleatoria Y tiene distribución Geométrica de parámetro $p = P(R) = 1/2$. Luego $P(Y = k) = (\frac{1}{2})^k \ \forall k \geq 1$, de donde:

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - (P(Y = 1) + P(Y = 2)) = 1/4.$$

Otra interpretación aceptada en esta prueba como válida es elegir un dado al azar y ese dado lanzarlo hasta obtener una cara roja. Sea Y_i la variable aleatoria que cuenta en número de intentos hasta obtener una cara roja dado que el dado seleccionado es el número i. Luego, Y_i tiene distribución Geométrica de parámetro $p_i = P(R|D_i) = 1 - \frac{i}{6}$.

Por lo tanto:

$$P(Y = k) = \sum_{i=1}^{5} P(Y = k|D_i)P(D_i) = \sum_{i=1}^{5} P(Y_i = k)P(D_i) = \sum_{i=1}^{5} p_i(1 - p_i)^{k-1}\frac{1}{5}.$$

Como antes,

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - (P(Y = 1) + P(Y = 2)) = 0.3056.$$

Problema 2 (14 puntos)

El espacio muestral puede representante por $\Omega = \{E_1E_2E_3 : E_i \in \{R, A, B\}$ para $i = 1, 2, 3\}$ donde $E_i = R, A$ ó B según se haya extraido una bola roja, azul o blanca en la $i-$ésima extracción para $i = 1, 2, 3$. Como el experimento es con reposición, se tiene que:

$$p_r = P(\text{obtener una bolilla roja}) = 2/10 = 1/5$$
$$p_b = P(\text{obtener una bolilla blanca}) = 5/10 = 1/2$$
$$p_a = P(\text{obtener una bolilla azul}) = 3/10$$

1. La probabilidad de sacar una bolilla de cada color es:

$$P(RAB) + P(RBA) + P(ARB) + P(ABR) + P(BAR) + P(BRA) = 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{50} = 0.18$$

2. El recorrido del vector (X, Y) es $R_{(X,Y)} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 3 \text{ y } i + j \leq 3\}$. La función de probabilidad conjunta del vector (X, Y) está dada por:

$X\|Y$	0	1	2	3
0	p_a^3	$3p_bp_a^2$	$3p_ap_b^2$	p_b^3
1	$3p_rp_a^2$	$6p_rp_bp_a$	$3p_rp_b^2$	0
2	$3p_r^2p_a$	$3p_r^2p_b$	0	0
3	p_r^3	0	0	0

Sustituyendo por los valores de p_r, p_b y p_a hallados anteriormente se obtiene que:

$X\|Y$	0	1	2	3	p_X
0	0.027	0.135	0.225	0.125	0.512
1	0.054	0.18	0.15	0	0.384
2	0.036	0.06	0	0	0.096
3	0.008	0	0	0	0.008
p_Y	0.125	0.375	0.375	0.125	

3. X indica el número de bolillas rojas en la muestra (que se toma con reposición), por lo tanto tiene distribución Binomial con parámetros $n = 3$ y $p = p_r$. Analógamente, Y tiene distribución Binomial con parámetros $n = 3$ y $p = p_b$. La función de probabilidad de cada una de ellas está dada en la tabla anterior (suma por filas/columnas de la función de probabilidad conjunta).

4. $X + Y = 3 - Z$ donde Z tiene distribución Binomial de parámetros $n = 3$ y $p = p_a$. Para $k \in R_{X+Y} = \{0, 1, 2, 3\}$ se tiene que:

$$P(X + Y = k) = P(3 - Z = k) = P(Z = 3 - k) = C^3_{3-k} p_a^{3-k}(1 - p_a)^k = C^3_k (1 - p_a)^k p_a^{3-k}$$

Es decir $X + Y$ tiene distribución Binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 1 - p_a = p_r + p_b = 7/10$.

Problema 3 (13 puntos)

1. (a)

$$P(X \geq V_0) = e^{-\lambda V_0} = e^{-\lambda} \leq 0.001 \quad \text{de donde} \quad \lambda \geq -\ln(0.001) = 6.91$$

(b) El cantidad de líquido dentro de la botella nunca puede superar V_0 litros, por lo tanto $Y = \min\{X, V_0\}$. Es decir,

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq V_0 \\ V_0 & \text{si } X > V_0 \end{cases}. \text{ Por lo tanto } F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } 0 \leq y \leq V_0 \\ 1 & \text{si } y > V_0 \end{cases}$$

Esto se puede probar de la siguiente forma:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Y \leq y \cap X \leq V_0) + P(Y \leq y \cap X \geq V_0)$$

Por lo tanto, para $y \leq V_0$ se tiene que:

$$P(X \leq y \cap X \leq V_0) = P(X \leq y) \quad \text{y} \quad P(V_0 \leq y \cap X \geq V_0) = 0,$$

de donde $F_Y(y) = P(X \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$. En caso contrario, es decir $y > V_0$, se tiene que:

$$P(X \leq y \cap X \leq V_0) = P(X \leq V_0) \quad \text{y} \quad P(V_0 \leq y \cap X \geq V_0) = P(X \geq V_0),$$

de donde $F_Y(y) = P(X \leq V_0) + P(X \geq V_0) = 1$.

2. Ahora el volumen de la botella V tiene distribución Uniforme en el intervalo $[V_0 - 0.01V_0, V_0 + 0.01V_0] = [0.99, 1.01]$ para $V_0 = 1$, es decir:

$$f_V(v) = \begin{cases} 50 & \text{si } v \in [0.99, 1.01] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar una botella con contenido superior a 1.005 es la probabilidad de que el tamaño del a botella supere 1.005 y al mismo tiempo el sistema de llenado envase más de 1.005, es decir:

$$P(X > 1.005, V > 1.005) = P(X > 1.005)P(V > 1.005) = P(X > 1.005)P(V > 1.005) =$$
$$e^{-\lambda 1.005}. \left(1 - \frac{1.005 - 0.99}{1.01 - 0.99}\right) = 0.000966 * 0.25$$

Se obtiene entonces que aproximadamente el 0.025% de las botellas supera los 1.005 litros.