PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER PARCIAL, 5 de Mayo de 2010

DATOS DEL ESTUDIANTE

No. de Parcial	Nombre y Apellido	Cédula

- **La duración del parcial es de 3 horas.**
- **Publicación de resultados: Miércoles 19 de Mayo, 20hs.**
- **Muestra de parciales: Viernes 21 de Mayo, 18:30hs.**

Problema 1 (13 puntos)

En una bolsa hay cinco dados, cada cara del dado es de color blanco o rojo. El dado número i (con $i = 1, 2, 3, 4, 5$) tiene i caras blancas y el resto rojas.

1. Se selecciona al azar un dado de la bolsa, se lanza y sale una cara roja:
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea el número i?
   (b) Sea X la variable aleatoria que indica el número del dado seleccionado. Hallar y graficar la función de distribución de X.
2. Se repite el mismo experimento de seleccionar un dado al azar hasta obtener una cara roja. Sea Y la variable aleatoria que cuenta la cantidad de repeticiones necesarias. ¿Cuál es la distribución de Y? Hallar la probabilidad de tener que repetir el experimento al menos 3 veces.

Problema 2 (14 puntos)

Se considera una caja con 10 bolillas, de las cuales 2 son rojas, 3 son azules y 5 son blancas. Se extrae una muestra de 3 bolillas con reposición. Se consideran las siguientes variables aleatorias:

- X la cantidad de bolillas rojas en la muestra
- Y la cantidad de bolillas blancas en la muestra
- Z la cantidad de bolillas azules en la muestra

1. Probar que la probabilidad de obtener una bolilla roja, una blanca y una azul es 0.18.
2. Hallar el recorrido del vector aleatorio (X, Y) y su función de probabilidad, es decir $p_{(X,Y)}(i, j) = P(X = i, Y = j)$ para cada (i, j) en el recorrido del vector (X, Y).

3. Calcular la función de probabilidad de las variables X e Y. Si es una distribución conocida, indique cuál es.

4. Calcular la función de distribución de $X+Y$. Sugerencia: observar que $X+Y+Z=3$.

Problema 3 (13 puntos)

Se considera una planta embotelladora, donde las botellas tienen volumen V. Para cada botella, el sistema de llenado envasa una cantidad X de líquido en litros, donde X es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ.

1. Suponiendo que el volumen es $V = 1$ litro:
   (a) Hallar el mínimo valor de λ para que la probabilidad de desborde sea menor que 0.001.
   (b) Sea Y la cantidad de líquido dentro de la botella. Hallar y graficar la función de distribución de Y.

2. Se considera ahora que el volumen V de las botellas es aleatorio y presenta una variabilidad uniforme de $\pm 1\%$ respecto a 1 litro. Se asume además que el volumen de las botellas y la cantidad de líquido enviado por el sistema de embotellado son independientes. Para el valor de λ de la parte anterior, calcular el porcentaje de botellas cuyo contenido es superior a 1.005 litros.