PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - Facultad de Ingeniería

Primer parcial 12 de Mayo de 2007

No de Parcial	Nombre y Apellido	Cedula

Para uso docente

1a	1b	1c	1d	1e	Total 1	2a	2b	Total 2	3a	3b	Total 3	Total

La duración del parcial es de 4 horas.

Publicación de resulatados: viernes 25 de Mayo hora 20:00.

Muestra de parciales lunes 28 de Mayo hora 16:00.

Indique horario o nombre del docente del teórico al que concurre:

Indique horario o nombre del docente del práctico al que concurre:

1. **(14 puntos)**
   Usted viaja usualmente en ómnibus para lo cual compra en cada viaje y en forma independiente un boleto de 5 dígitos que varían del 0 al 9.

   (a) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad p de obtener un boleto capicúa (cifra que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda).

   (b) **(3 puntos)** Calcule la probabilidad de obtener un boleto capicúa sabiendo que el mismo contiene exactamente 3 dígitos iguales.

   (c) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 2 boletos capicúas en los siguientes 7 viajes?

   (d) **(3 puntos)** ¿Cuántos viajes son necesarios, para que la probabilidad de obtener al menos un capicúa sea mayor a $\frac{1}{2}$?

   (e) **(2 puntos)** ¿Cuántos viajes espera realizar hasta obtener 5 boletos capicúas?

   En las partes c y d no es necesario completar los cálculos.

2. **(14 puntos)**

   (a) **(7 puntos)** Sea $f_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de densidad de una variable aleatoria Z absolutamente continua, tal que

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{a}{1+z^2} & \text{si } z < 0 \\ be^{-z} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

i. Halle a y b sabiendo que 0 es mediana de Z. (Si Z es absolutamente continua y m es mediana de Z entonces $P(Z \geq m) = \frac{1}{2}$).

ii. Determine la función de distribución de la variable aleatoria Z.

iii. Calcule el valor esperado de Z.

(b) **(7 puntos)** Sea $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función de densidad conjunta de una variable aleatoria (X, Y) absolutamente continua, tal que

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{a}{1 + x^2} & \text{si } x < 0 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \\ be^{-x} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

siendo a y b los valores hallados en **a i.**

i. Demuestre que la función de densidad marginal f_X coincide con la función de densidad f_Z de la parte **a**.

ii. Calcule la densidad marginal f_Y.

iii. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justifique.

3. **(12 puntos)**

(a) **(8 puntos)** Sean X e Y dos variables aleatorias (v.a.) independientes, con distribución exponencial de parámetros μ y λ, respectivamente ($\mu > 0$ y $\lambda > 0$).

i. Demuestre que la variable $Z = \min\{X, Y\}$ tiene distribución exponencial y determine su parámetro.

ii. Calcule $P\{X \leq Y\}$ en función de μ y λ .

(b) **(4 puntos)** Un sistema electrónico, compuesto por dos elementos A y B puede ser afectado por tres tipos de shocks eléctricos:

- Uno que sólo destruye a A y se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo dado por la v.a. X_1, que tiene distribución exponencial con parámetro λ_1.
- Uno que sólo destruye a B y se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo dado por la v.a. X_2, que tiene distribución exponencial con parámetro λ_2.
- Uno que destruye simultáneamente a ambos componentes y se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo dado por la v.a. X_3, que tiene distribución exponencial con parámetro λ_3.

Sean T_1 y T_2 las duraciones de los elementos originales A y B (partiendo del instante inicial mencionado arriba). Calcule $P(T_1 = T_2)$ en función de λ_1, λ_2 y λ_3 ($\lambda_1 > 0$,$\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$). Suponemos que X_1, X_2 y X_3 son v.a. independientes.