PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER PARCIAL 2005

DATOS DEL ESTUDIANTE

No. de Parcial	Apellidos y Nombres	Cédula

- **La duración total de la prueba es de 3 horas y media.**
- **La prueba es sin material y sin calculadora.**
- **Publicación de resultados: Miércoles 25 de mayo - 18:00 hs.**
- **Muestra de parciales: Viernes 27 de mayo - 16:00 hs.**

Problema 1 (8 puntos)

a) **(4 puntos)** Pruebe la fórmula de Bayes, esto es, si A y B son dos sucesos con probabilidad positiva entonces:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|B^c)\mathbf{P}(B^c)}.$$

b) **(4 puntos)** Sean X e Y dos variables aleatorias discretas *independientes* tales que los posibles valores de X son $a_1, a_2, \ldots, a_m$ y los posibles valores de Y son $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Calcule los posibles valores de la variable aleatoria $X + Y$ y pruebe que, para cada valor posible c,

$$\mathbf{P}(X + Y = c) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(Y = c - a_i)\mathbf{P}(X = a_i).$$

Problema 2 (8 puntos)

Considere una variable aleatoria absolutamente continua X con densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} (1+\beta)x^{\beta} \text{ si } x \in [0, \alpha] \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases} \tag{1}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

a) **(4 puntos)** Calcule el valor de los parámetros α y β sabiendo que $\mathbf{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

b) **(4 puntos)** Considere dos variables aleatorias, X e Y, *independientes e idénticamente distribuidas* con densidad de probabilidad definida en (1). Calcule la función de distribución de la variable aleatoria $Z = \max\{X, Y\}$.

Problema 3 (8 puntos)

Dos personas, A y B, participan en el siguiente juego: la persona A tira un dado y la persona B tira tres dados. Si B no puede superar con ninguno de sus tres dados el resultado de la tirada de A, entonces el ganador es A. En caso contrario el ganador es B.

a) **(4 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane el jugador A.

   Sugerencia 1: Condicione sobre los posibles resultados del dado del jugador A.

   Sugerencia 2: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441$ y $6^4 = 1296$.

b) **(4 puntos)** Si se sabe que el ganador fue el jugador A, ¿cuál es la probabilidad de que A haya obtenido un cuatro?

Problema 4 (8 puntos)

La cantidad de aceite (en cm^3) que envía el pico de llenado de una máquina envasadora para llenar latas de 10 cm^3 es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{U}\,[8, 11]$. En caso que la cantidad de aceite enviado por el pico supere la capacidad de una lata, ese aceite extra se rebasa y se pierde.

a) **(4 puntos)** Calcule la probabilidad de que al llenar 100 latas se rebasen al menos 2.

b) **(4 puntos)** Se denota con Z al número de latas que se llenan hasta que una lata se rebasa. Obtenga una expresión para el mayor valor de n para el cual se cumple:

$$\mathbf{P}(Z \geq n) \geq \frac{1}{8}.$$

   Sugerencia: El siguiente resultado puede ser de utilidad (aunque se puede prescindir de él): para cualquier número real a se cumple $\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}$.

Problema 5 (8 puntos)

Considere un rectángulo de base X y altura Y, donde X e Y son variables aleatorias *independientes e idénticamente distribuidas* con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2]$. Sea U el perímetro y A el área del rectángulo.

a) **(4 puntos)** Calcule la función de distribución de U.

b) **(4 puntos)** Calcule $\mathbf{E}(U)$ y $\mathbf{E}(A)$.

SOLUCIÓN

Problema 1

a) De la definición de probabilidad condicional:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

De la segunda igualdad obtenemos que $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)$ y reemplazando esto en el numerador de la primera igualdad, queda:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}. \tag{2}$$

Finalmente, usando que los sucesos B y B^c forman una partición del espacio muestral, tenemos:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B^c) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|B^c)\mathbf{P}(B^c),$$

y llevando esto al denominador de (2) obtenemos la fórmula de Bayes.

b) Está claro que los posibles valores de la variable $X + Y$ son los números de la forma $c = a_i + b_j$, donde a_i es un valor posible para la variable X y b_j es un valor posible para la variable Y.

Usando que los sucesos $\{X = a_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, forman una partición del espacio muestral, tenemos para cada valor posible c:

$$\mathbf{P}(X + Y = c) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(X + Y = c, X = a_i).$$

Observando que $\mathbf{P}(X + Y = c, X = a_i) = \mathbf{P}(Y = c - a_i, X = a_i)$ y que las variables X e Y son independientes, queda:

$$\mathbf{P}(X + Y = c) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(Y = c - a_i, X = a_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(Y = c - a_i)\mathbf{P}(X = a_i).$$

Problema 2

a) De la condición de normalización:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\alpha} (1+\beta)x^{\beta}dx = \alpha^{1+\beta},$$

de donde se obtiene $\alpha = 1$ (pues $\beta > 0$).

Por otra parte:

$$\frac{1}{8} = \mathbf{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+\beta)x^{\beta}dx = \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta+1} = \frac{1}{2^{\beta+1}},$$

y por lo tanto $\beta + 1 = 3$, así que $\beta = 2$.

b) Es fácil verificar, con los valores obtenidos para α y β, que si X es una variable aleatoria con densidad de probabilidad definida en (1) entonces la función de distribución de X es:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \int_0^t 3x^2dx = t^3 & \text{si } t \in (0,1) \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Por otra parte, para calcular la función de distribución de la variable aleatoria $Z = \max\{X, Y\}$ escribimos, para cada t real:

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbf{P}(Z \leq t) = \mathbf{P}(\max\{X,Y\} \leq t) = \mathbf{P}(X \leq t, Y \leq t) \\ &= \mathbf{P}(X \leq t)\mathbf{P}(Y \leq t) = F_X(t)F_Y(t) = (F_X(t))^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que las variables X e Y son independientes y que tienen la misma distribución de probabilidad. Utilizando la función de distribución hallada en (3) queda:

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t^6 & \text{si } t \in (0,1) \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Problema 3

a) Para cada $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, definimos los sucesos

$$A_i = \{ \text{ El jugador } A \text{ obtiene el resultado } i\}.$$

Estos sucesos forman una partición del espacio muestral, de manera que condicionando sobre ellos tenemos:

$$\mathbf{P}(\text{Gane } A) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}(\text{Gane } A|A_i)\mathbf{P}(A_i).$$

Está claro que $\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{6}$, para cada valor de i, y además

$$\mathbf{P}(\text{Gane } A|A_i) = \left(\frac{i}{6}\right)^3,$$

porque si el jugador A obtiene el resultado i, entonces el ganador es A si y sólo si el jugador B obtiene un resultado menor o igual a i en cada uno de sus dados (y esto da i casos favorables sobre 6 casos posibles para cada uno de los tres dados de B). Usando todo esto, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{Gane } A) &= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{6}{6}\right)^3\right] \\ &= \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3}{6^4} = \frac{441}{1296}. \end{aligned}$$

b) Está claro, de la definición de probabilidad condicional, que:

$$\mathbf{P}(A_4|\text{Gane } A) = \frac{\mathbf{P}(A_4 \cap \text{Gane } A)}{\mathbf{P}(\text{Gane } A)} = \frac{\mathbf{P}(\text{Gane } A|A_4)\mathbf{P}(A_4)}{\mathbf{P}(\text{Gane } A)}.$$

De manera que, usando los resultados calculados en (a), obtenemos:

$$\mathbf{P}(A_4|\text{Gane } A) = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\frac{441}{1296}} = \frac{10368}{71442}.$$

Problema 4

Cada lata tiene una capacidad de 10 cm^3, de manera que la probabilidad de que una lata se rebase es $\mathbf{P}(X > 10) = \frac{1}{3}$ (ya que $X \sim \mathcal{U}[8, 11]$).

a) Al llenar 100 latas podemos pensar que repetimos 100 veces, y de manera independiente, el experimento binario que consiste en llenar una lata y ver si rebasa o no rebasa (podemos pensar que Exito corresponde al suceso "la lata se rebasa" y Fracaso corresponde al suceso "la lata no se rebasa"). Introducimos la variable aletoria

$$Y = \text{ Número de latas que se rebasan al llenar 100.}$$

Está claro que Y tiene distribución Binomial de parámetros $n = 100$ y $p = \frac{1}{3}$. Tenemos que calcular entonces

$$\mathbf{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(Y < 2) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) - \mathbf{P}(Y = 1)$$

y sabemos que

$$\mathbf{P}(Y = 0) = C_0^{100} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(Y = 1) = C_1^{100} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{99} = 100\,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{99}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{P}(Y \geq 2) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100} - 100\,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{99}.$$

b) Usando una interpretación parecida a la anterior (repeticiones independientes de un experimento binario hasta obtener Exito), queda claro que la variable aleatoria Z tiene distribución Geométrica de parámetro $p = \frac{1}{3}$. Ahora, el suceso $\{Z \geq n\}$ es equivalente a decir que los primeros $n-1$ experimentos binarios corresponden al resultado Fracaso, de manera que:

$$\mathbf{P}(Z \geq n) = (1-p)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Otra manera de calcular:

$$\mathbf{P}(Z \geq n) = 1 - \mathbf{P}(Z < n) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}p = 1 - p\sum_{i=0}^{n-2}(1-p)^i = (1-p)^{n-1}.$$

Finalmente debemos encontrar el mayor valor de n compatible con la condición:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \geq \frac{1}{8},$$

que es equivalente a la condición $n \leq \frac{\log 8}{\log 3 - \log 2} + 1$. Por lo tanto el mayor valor de n está dado por (la parte entera de) el lado derecho de esta última desigualdad.

Problema 5

Para un rectángulo de base X y altura Y el perímetro y el área están dados, respectivamente, por: $U = 2X + 2Y$ y $A = XY$.

a) Para calcular la función de distribución de U usamos la definición:

$$F_U(t) = \mathbf{P}(U \leq t) = \mathbf{P}(2X + 2Y \leq t) = \mathbf{P}(X + Y \leq t/2).$$

Esto nos lleva a calcular la distribución de una suma de variables aleatorias independientes. Como $X \sim \mathcal{U}[0, 2]$ e $Y \sim \mathcal{U}[0, 2]$, sus densidades de probabilidad son:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

De esta manera, debido a la independencia de las variables X e Y, la densidad de probabilidad conjunta es:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Con esto calculamos

$$F_U(t) = \mathbf{P}(X + Y \leq t/2) = \int\int_{\{X+Y \leq t/2\}} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy.$$

Separamos en varios casos:

– Si $t \leq 0$, la densidad de probabilidad conjunta vale 0 en la región de integración y por lo tanto $F_U(t) = 0$.

– Si $0 < t \leq 4$, tenemos:

$$F_U(t) = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{t}{2}} dx \int_0^{\frac{t}{2} - x} dy = \frac{1}{8} \left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

– Si $4 < t \leq 8$, tenemos (se dejan de lado los detalles del cálculo de la integral):

$$F_U(t) = \frac{1}{4} 2 \frac{t - 4}{2} + \frac{1}{4} \int_{\frac{t-4}{2}}^{2} dx \int_0^{\frac{t}{2} - x} dy = -\frac{1}{32} t^2 + \frac{1}{2} t - 1.$$

– Si $t > 8$, $F_U(t) = 1$.

Resumiendo, la función de distribución del perímetro es:

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^2}{32} & \text{si } 0 < t \leq 4 \\ -\frac{1}{32} t^2 + \frac{1}{2} t - 1 & \text{si } 4 < t \leq 8 \\ 1 & \text{si } t > 8. \end{cases}$$

b) Como $X \sim \mathcal{U}[0,2]$ entonces $\mathbf{E}(X) = \int_0^2 \frac{1}{2} t dt = 1$; análogamente $\mathbf{E}(Y) = 1$. Ahora, usando la propiedad de aditividad del valor esperado, resulta:

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(2X + 2Y) = 2\mathbf{E}(X) + 2\mathbf{E}(Y) = 4.$$

Por otra parte, las variables X e Y son independientes, de manera que:

$$\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 1.$$