PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER PARCIAL 2004

DATOS DEL ESTUDIANTE

No. de Parcial	Apellidos y Nombres	Cédula

- La duración total de la prueba es de **4 horas**.
- **Publicación de resultados:** Lunes 24 de Mayo - 18:00hs.
- **Muestra de parciales:** Miércoles 26 de Mayo - 18:00hs.

Problema 1 (15 puntos)

Se extrae una bolilla al azar de un bolillero que contiene 3 bolillas numeradas de 1 a 3. Llamamos X al número de la bolilla extraída. Una vez conocido el valor de X, extraemos una nueva bolilla al azar de otro bolillero que contiene $3 - X + 1$ bolillas numeradas de X a 3 (por ejemplo: si $X = 2$, la segunda bolilla se extrae de un bolillero que contiene dos bolillas con los números 2 y 3). Llamamos Y al número de la bolilla extraída en el segundo bolillero.

a) **(5 puntos)**

i) Calcular $\mathbf{P}(Y = 3|X = 1)$.

ii) Calcular $\mathbf{P}(Y = 3)$.

iii) ¿Son X e Y independientes? Justificar.

b) **(5 puntos)**

i) Hallar p_Y, la función de probabilidad de Y.

ii) Calcular $\mathbf{E}(Y)$.

c) **(5 puntos)** Sea Z el número de dos cifras que se forma tomando la cifra de las unidades igual a Y y la de las decenas igual a X (por ejemplo, si $X = 1$ e $Y = 3$ entonces $Z = 13$).

i) Hallar el conjunto de todos los números de dos cifras (que pueden formarse por el procedimiento descripto) que tienen probabilidad estrictamente positiva.

ii) Calcular $\mathbf{P}(Y = 2|Z > 20)$.

Problema 2 (13 puntos)

a) **(5 puntos)** Considere una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Hallar los parámetros μ y σ sabiendo que se cumple

$$\mathbf{P}(|X - \mu| > 1.32) = 0.66 \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(X > 8.51) = 0.015.$$

b) Considere tres variables aleatorias *independientes*, X, U, Y, tales que: X es exponencial de parámetro $\lambda = 2$; $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ y finalmente Y es Bernoulli[1] de parámetro p.

A partir de estas tres variables se construye una nueva variable aleatoria, Z, definida de la siguiente manera:

$$Z = \begin{cases} X \text{ si } Y = 0 \\ U \text{ si } Y = 1. \end{cases}$$

i) **(4 puntos)** Hallar el parámetro p de la distribución de Y sabiendo que se cumple $\mathbf{P}(Z \leq 1) = 1 - \frac{2}{3e^2}$.

ii) **(4 puntos)** Hallar F_Z, la función de distribución de la variable aleatoria Z.

Problema 3 (12 puntos)

Se tiene una moneda cargada que satisface $\mathbf{P}(Cara) = p$ y $\mathbf{P}(Número) = 1 - p$, donde $0 < p < 1$. Se tira la moneda sucesivas veces y de manera independiente. Considere la variable aleatoria definida por

$$X = \text{ Número de tiradas hasta obtener } \textit{Cara} \text{ por primera vez }.$$

a) **(6 puntos)**

i) Demostrar que: $\mathbf{P}(X \text{ sea impar }) = \frac{1}{2-p}$.

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de tiradas hasta obtener *Número* por primera vez sea un número impar?

b) **(6 puntos)** Considere un número natural k fijo.

i) Calcule $\mathbf{P}(X > k)$.

ii) Suponga ahora que se tienen 5 monedas idénticas a la moneda cargada y que se tiran sucesivas veces cada una de esas monedas de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que en al menos una de esas monedas se obtenga *Cara* por primera vez después de la k-ésima tirada?

Sugerencia: El siguiente resultado puede ser de utilidad (aunque se puede prescindir de él): para cualquier número real a se cumple $\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}$.

[1] Y es una variable de Bernoulli de parámetro p si los posibles valores de Y son 0 y 1 y además $\mathbf{P}(Y = 1) = p$ y $\mathbf{P}(Y = 0) = 1 - p$.

SOLUCIÓN DEL PARCIAL

Problema 1

Denotamos

$$\begin{array}{rcl} X & = & \text{número de la bolilla extraída del primer bolillero} \\ Y & = & \text{número de la bolilla extraída del segundo bolillero} \end{array}$$

Los posibles bolilleros de los que se extrae la segunda bolilla están indicados en la figura:

$$\boxed{(1)\ (2)\ (3)}$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{(1)\ (2)\ (3)} & \boxed{(2)\ (3)} & \boxed{(3)} \\ \text{X = 1} & \text{X = 2} & \text{X = 3} \end{array}$$

De manera que:

a) i) $\mathbf{P}(Y=3|X=1) = \frac{1}{3}$.

ii)

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(Y=3) & = & \mathbf{P}(Y=3|X=1)\mathbf{P}(X=1) + \mathbf{P}(Y=3|X=2)\mathbf{P}(X=2) + \mathbf{P}(Y=3|X=3)\mathbf{P}(X=3) \\ & = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + 1 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{18} \end{array}$$

iii) X e Y no son independientes, pues $\mathbf{P}(Y=3) \neq \mathbf{P}(Y=3|X=1)$.

También se puede justificar dando un contraejemplo como el siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(Y=3, X=1) & = & \mathbf{P}(Y=3|X=1)P(X=1) = \dfrac{1}{9}; \\ \mathbf{P}(Y=3)\mathbf{P}(X=1) & = & \dfrac{11}{18} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{54} \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbf{P}(Y=3, X=1) \neq \mathbf{P}(Y=3)\mathbf{P}(X=1)$.

b) i)

$$\begin{array}{rcl} p_Y(1) & = & \mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(Y=1|X=1)\mathbf{P}(X=1) = \dfrac{1}{9} \\ p_Y(2) & = & \mathbf{P}(Y=2) = \mathbf{P}(Y=2|X=1)\mathbf{P}(X=1) + \mathbf{P}(Y=2|X=2)\mathbf{P}(X=2) \\ & = & \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{18} \\ p_Y(3) & = & \mathbf{P}(Y=3) = \dfrac{11}{18} \end{array}$$

ii)

$$\mathbf{E}(Y) = 1 \times \mathbf{P}(Y=1) + 2 \times \mathbf{P}(Y=2) + 3 \times \mathbf{P}(Y=3) = \frac{5}{2}$$

c) i)

X	Y
1	1
1	2
1	3
2	2
2	3
3	3

De manera que el conjunto de número de dos cifras que pueden formarse es

$$R_Z = \{11, 12, 13, 22, 23, 33\}.$$

ii) Por definición de probabilidad condicional:

$$\mathbf{P}(Y = 2|Z > 20) = \frac{\mathbf{P}(Y = 2, Z > 20)}{\mathbf{P}(Z > 20)}.$$

Por otra parte:

$$\mathbf{P}(Y = 2, Z > 20) = \mathbf{P}(Z = 22) = \mathbf{P}(Y = 2, X = 2) = \mathbf{P}(Y = 2|X = 2)\mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{6},$$

y además:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z > 20) &= \mathbf{P}(Z = 22) + \mathbf{P}(Z = 23) + \mathbf{P}(Z = 33) \\
&= \mathbf{P}(Y = 2, X = 2) + \mathbf{P}(Y = 3, X = 2) + \mathbf{P}(Y = 3, X = 3) \\
&= \mathbf{P}(Y = 2|X = 2)\mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(Y = 3|X = 2)\mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(Y = 3|X = 3)P(X = 3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

De manera que $\mathbf{P}(Y = 2|Z > 20) = \frac{1}{4}$.

Problema 2

a) La condición $\mathbf{P}(|X - \mu| > 1.32) = 0.66$ es equivalente a:

$$\mathbf{P}(X - \mu > 1.32) + \mathbf{P}(X - \mu < -1.32) = 0.66$$

y debido a la simetría de toda variable normal respecto del parámetro μ, esto último es equivale a poner

$$2\mathbf{P}(X - \mu < -1.32) = 0.66 \Rightarrow \mathbf{P}(X - \mu < -1.32) = 0.33$$

Dividiendo por σ dentro del argumento de la probabilidad, obtenemos finalmente

$$\mathbf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -\frac{1.32}{\sigma}\right) = 0.33$$

Ahora, la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ cumple $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, de modo que usando la Tabla de la Normal llegamos a la condición:

$$\frac{1.32}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow \sigma = 3.$$

Procediendo de manera análoga con la condición $\mathbf{P}(X > 8.51) = 0.015$ llegamos a

$$\mathbf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{8.51-\mu}{\sigma}\right) = 0.015$$

de donde resulta, usando nuevamente la Tabla de la Normal:

$$\frac{8.51-\mu}{\sigma} = 2.17 \Rightarrow \mu = 2.$$

b) i) Condicionando sobre la variable Y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z \leq 1) &= \mathbf{P}(Z \leq 1|Y=0)\mathbf{P}(Y=0) + \mathbf{P}(Z \leq 1|Y=1)\mathbf{P}(Y=1) \\
&= \mathbf{P}(X \leq 1)(1-p) + \mathbf{P}(U \leq 1)p \\
&= (1-e^{-2})(1-p) + p.
\end{aligned}$$

De la condición $\mathbf{P}(Z \leq 1) = 1 - \frac{2}{3e^2}$ podemos calcular entonces el valor de p:

$$(1-e^{-2})(1-p) + p = 1 - \frac{2}{3e^2} \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

ii) Para obtener F_Z procedemos de la misma manera:

$$\begin{aligned}
F_Z(t) &= \mathbf{P}(Z \leq t) = \mathbf{P}(Z \leq t|Y=0)\mathbf{P}(Y=0) + \mathbf{P}(Z \leq t|Y=1)\mathbf{P}(Y=1) \\
&= \mathbf{P}(X \leq t)\frac{2}{3} + \mathbf{P}(U \leq t)\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos finalmente (analizando los casos por separado):

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ (1-e^{-2t})\frac{2}{3} + \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (1-e^{-2t})\frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$

Problema 3

a) Está claro de la definición de la variable aleatoria X, que $X \sim Geo(p)$.

i)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \text{ sea impar }) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = 2k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{2k} = p\sum_{k=0}^{\infty}[(1-p)^2]^k \\ &= p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Hemos usado la serie geométrica que se daba en la sugerencia.

Otra manera de resolver:

Sabemos que $\mathbf{P}(X \text{ sea impar }) + \mathbf{P}(X \text{ sea par }) = 1$. Además, si X es par, entonces necesariamente el primer resultado debe corresponder a un *Número* y entonces, contando a partir de ese primer resultado y usando independencia, obtenemos:

$$\mathbf{P}(X \text{ sea par }) = (1-p)\mathbf{P}(X \text{ sea impar }).$$

De estas dos igualdades se obtiene el resultado enunciado.

ii) Si llamamos

$$Y = \text{ Número de tiradas hasta obtener } \textit{Número} \text{ por primera vez },$$

entonces está claro que $Y \sim Geo(1-p)$. Usando el resultado que acabamos de probar:

$$\mathbf{P}(Y \text{ sea impar }) = \frac{1}{2-(1-p)} = \frac{1}{1+p}.$$

b) i)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > k) &= 1 - \mathbf{P}(X \le k) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} p(1-p)^i = 1 - p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k.\end{aligned}$$

Otra manera de resolver:

Es fácil darse cuenta que $X > k$ es equivalente a que las primeras k tiradas correspondan a *Número* y la probabilidad de que pase esto es $(1-p)^k$. De donde se obtiene el resultado anterior.

ii) Estamos repitiendo 5 veces y de manera independiente un experimento que consiste en tirar una moneda hasta obtener *Cara* por primera vez. Convenimos en decir que hay un *Éxito* cada vez que en uno de esos experimentos se obtiene *Cara* por primera vez después de la k-ésima tirada. Entonces la probabilidad de obtener un *Éxito* es lo que calculamos recién, esto es: $(1-p)^k$.

La probabilidad que tenemos que calcular en el problema es (calculamos por el complemento):

$$1 - \mathbf{P}(\text{ tener 5 } \textit{Fracasos} \text{ }) = 1 - [1-(1-p)^k]^5.$$