PROBLEMAS

1. Un tribunal integrado por cinco jurados A, B, C, D y E, tiene que votar entre dos candidatos I y II. Cada jurado o bien vota a I o bien vota a II, no hay abstenciones. La decisión final del tribunal será aquella que cuente con una mayoría especial de votos (es decir, por el candidato que tiene **cuatro o más votos**). Se sabe que cada jurado decide en forma independiente de los demás en base a las siguientes probabilidades:

Jurado	Probabilidad de que vote a I
A	0.6
B	0.2
C	0.3
D	0.4
E	0.5

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tribunal se decida por el candidato I?

   (b) Se sabe ahora que ganó el candidato I .¿Cuál es la probabilidad de que el jurado A lo haya votado?

2. (a) Sea X una variable aleatoria real absolutamente continua con densidad f, siendo f una función par (es decir $f(x) = f(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$). Sea F_X su función de distribución.

      i. Probar que $F_X(-x) = 1 - F_X(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

      ii. Probar que si $E(X)$ existe y es finito, entonces $E(X) = 0$.

   (b) La intensidad relativa de una señal de sonido se puede modelar con una variable aleatoria X absolutamente continua cuya función de densidad es

   $$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\ \forall\ \ x \in \mathbb{R}. \quad \text{(conocida con el nombre de Laplace)}$$

   Se sabe además que una cierta señal de sonido es claramente perceptible para el oído humano medio si la intensidad relativa medida por X está entre $-2,1$ y $2,1$. ¿Cuál es la probabilidad de que al enviar una tal señal, ésta no sea percibida claramente por los destinatarios (suponiendo que los mismos son personas de capacidad auditiva media)?

   (c) i. Se emiten señales de sonido en forma independiente hasta que se reciban 2 señales con claridad. Hallar la probabilidad de tener que enviar exactamente 5 señales.

      ii. Como en la parte anterior se emiten señales en forma independiente, pero ahora el receptor promedia las señales recibidas. Al proceder de esta manera, si el número de señales es muy grande, podrá el receptor oír la señal resultante claramente?

3. Se consideran las variables aleatorias independientes $X \sim \mathbf{N}(0,1)$ e $Y \sim \mathbf{Ber}(p)$.
   Definimos la variable aleatoria $Z = X^Y$

   (a) i. Probar que $Z = XY + 1 - Y$ casi seguramente. (Es decir $P(Z = XY + 1 - Y) = 1$)

      ii. Calcular $\mathbf{E}(Z)$ y $\mathbf{Var}(Z)$.

   (b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. con distribución $\mathbf{N}(0,1)$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. con distribución $\mathbf{Ber}(p)$, se supone además que las $X's$ y las $Y's$ son independientes entre sí.
   Se consideran las variables $Z_1, \ldots, Z_n$ donde $Z_i = X_i^{Y_i}$.

   ¿Existen valores reales μ y σ $(\sigma > 0)$ tales que $\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{Z}_n - \mu}{\sigma}\right) \approx \mathbf{N}(0,1) \quad (\text{si } n \to +\infty)$?

   En caso afirmativo, calcularlos en función de p.

Solución problema 1

Parte a)

Consideremos los sucesos

$$\begin{array}{l} A \text{ "el jurado } A \text{ vota por el candidato} I\text{"} \\ B \text{ "el jurado } B \text{ vota por el candidato } I\text{"} \\ C \text{ "el jurado } C \text{ vota por el candidato } I\text{"} \\ D \text{ "el jurado } D \text{ vota por el candidato } I\text{"} \end{array}$$

y la variable aleatoria

$$X = \text{ "cantidad de votos obtenidos por el candidato } I\text{"}$$

Luego

$$[X \geq 4] = \text{ "el tribunal se decide por el candidato } I\text{"}$$

y se cumple que

$$\mathbf{P}(X \geq 4) = \mathbf{P}(X = 4) + \mathbf{P}(X = 5)$$

pero

$$\begin{aligned} [X = 4] &= (A^c \cap B \cap C \cap D \cap E) \cup (A \cap B^c \cap C \cap D \cap E) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D \cap E) \cup \\ &\quad (A \cap B \cap C \cap D^c \cap E) \cup (A \cap B \cap C \cap D \cap E^c) \end{aligned}$$

$$[X = 5] = A \cap B \cap C \cap D \cap E$$

y como las uniones anteriores son disjuntas y los sucesos son independientes

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 4) &= (1 - 0.6)(0.2)(0.3)(0.4)(0.5) + (0.6)(1 - 0.2)(0.3)(0.4)(0.5) + \\ &\quad + (0.6)(0.2)(1 - 0.3)(0.4)(0.5) + (0.6)(0.2)(0.3)(1 - 0.4)(0.5) + \\ &\quad + (0.6)(0.2)(0.3)(0.4)(1 - 0.5) \end{aligned}$$

$$0.00\,48 + 0.0\,288 + 0.0\,168 + 0.0\,108 + 0.00\,72 = 0.0\,684$$

$$\mathbf{P}(X = 5) = (0.6)(0.2)(0.3)(0.4)(0.5) = 0.00\,72$$

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq 4) = 0.0\,684 + 0.00\,72 = 0.0756}$$

Parte b)

$$\begin{aligned} G &= \text{" ganó el candidato } I \text{ "} = [X \geq 4] \\ A_I &= \text{"el jurado } A \text{ vota al candidato } I \text{ "} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_I / G) &= \frac{P(A_I \cap G)}{P(G)} = \frac{P([X = 4] \cup [X = 5]) - P(A^c \cap B \cap C \cap D \cap E)}{P(G)} \\ &= \frac{0.0756 - 0.00\,48}{0.0756} = 0.93651 \end{aligned}$$

Solución problema 2

Parte a)

i) F es la función de distribución de la variable aleatoria X, que tiene densidad f , entonces

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt \overset{y=-t}{=} -\int_{+\infty}^{x} f(-y)dy = \int_{x}^{+\infty} f(-y)dy \overset{f(y)=f(-y)}{=} \int_{x}^{+\infty} f(y)dy = \\ &= 1-\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = 1-F(x)\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) Si existe $\mathbf{E}(X)$ y es finito se tiene que existen y son finitas $\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$, $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$ y

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx + \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx.$$

Pero además

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx \overset{y=-x}{=} \int_{+\infty}^{0} yf(-y)dy \overset{f(y)=f(-y)}{=} \int_{+\infty}^{0} yf(y)dy = -\int_{0}^{+\infty} yf(y)dy,$$

entonces $\mathbf{E}(X) = 0$.

Parte b)

X con distribución de Laplace. La señal no es percibida si $|X| > 2,1$.

$$\mathbf{P}(|X| > 2,1) = \mathbf{P}(X > 2,1) + \mathbf{P}(X < -2,1) = 1 - F_X(2,1) + F_X(-2,1) =$$

$$= 2(1-F_X(2,1)) = 2\int_{2,1}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{2,1}^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{2,1}^{+\infty} = e^{-2,1}.$$

Parte c)

i) Sea Y una variable aleatoria tal que Y cuenta la cantidad de señales que hay que enviar hasta recibir 2 con claridad, entonces $Y \sim \mathbf{BN}(2, 1-e^{-2,1})$.

($1-e^{-2,1}$ es la probabilidad de percibir la señal con claridad.)

$$\mathbf{P}(Y=5) = C_1^4 \left(1-e^{-2,1}\right)^2 \left(e^{-2,1}\right)^3.$$

ii) Se tienen $X_1,\ X_2,\dots,X_n,\dots$variables aleatorias i.i.d. con distribución de Laplace. Existe el valor esperado y es finito , por lo que $\mathbf{E}(X_i) = 0\ \forall i$ (por la parte a) ii)).
Entonces por la LFGN se tiene que el promedio $\overline{X_n} \overset{c.s}{\to} 0$ (si $n \to +\infty$), por lo que el promedio de las señales se aproxima a 0 al aumentar el número de señales y el destinatario tendera a oirla claramente.

Solución problema 3

Parte a)
i) Como $Y \sim \mathbf{Ber}(p)$, si $A = [Y = 1] \subset \Omega$ y $B = [Y = 0] \subset \Omega$,
es claro que

$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset \text{ y } \mathbf{P}(A \cup B) = 1 \\ & \quad \text{es decir, } \{A \cup B\} \text{ es una partición de } \Omega \text{ con probabilidad } 1 \end{aligned}$$

Primer caso $\omega \in A$ y $\omega \notin B$

$$\begin{aligned} X(\omega)^{Y(\omega)} &= X(\omega)^1 = X(\omega) \\ X(\omega)\,Y(\omega) + 1 - Y(\omega) &= X(\omega)\,1 + 1 - 1 = X(\omega) \end{aligned}$$

entonces $X^Y = XY + 1 - Y$ en A.
Segundo caso $\omega \in B$ y $\omega \notin A$

$$\begin{aligned} X(\omega)^{Y(\omega)} &= X(\omega)^0 = 1 \\ X(\omega)\,Y(\omega) + 1 - Y(\omega) &= X(\omega)\,0 + 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

entonces $X^Y = XY + 1 - Y$ en B.

Por lo tanto $X^Y = XY + 1 - Y$ en $A \cup B$ y $\mathbf{P}(A \cup B) = 1$, es decir que $X^Y = XY + 1 - Y$ (c.s.)

ii) $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(XY + 1 - Y) = \mathbf{E}(XY) + 1 - \mathbf{E}(Y) \overset{X \text{ e } Y \text{ indep.}}{=} \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + 1 - \mathbf{E}(Y) = 0\,p + 1 - p = 1 - p$

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{Var}(X) + (\mathbf{E}(X))^2 = 1$$
$$\mathbf{E}\left(Y^2\right) = \mathbf{Var}(Y) + (\mathbf{E}(Y))^2 = p(1-p) + p^2 = p$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(Z) &= \mathbf{Var}(XY + 1 - Y) = \mathbf{Var}(XY - Y) = \mathbf{E}\left((XY - Y)^2\right) - (\mathbf{E}(XY - Y))^2 = \\ &= \mathbf{E}\left(X^2Y^2 - 2XY^2 + Y^2\right) - \left((\mathbf{E}(XY))^2 - 2\mathbf{E}(XY)\,\mathbf{E}(Y) + (\mathbf{E}(Y))^2\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(X^2Y^2\right) - 2\mathbf{E}\left(XY^2\right) + \mathbf{E}\left(Y^2\right) - \left((\mathbf{E}(XY))^2 - 2\mathbf{E}(XY)\,\mathbf{E}(Y) + (\mathbf{E}(Y))^2\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right) - 2\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\left(Y^2\right) + \mathbf{E}\left(Y^2\right) - \left((\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y))^2 - 2\mathbf{E}(X)\,(\mathbf{E}(Y))^2 + (\mathbf{E}(Y))^2\right) = \\ &= 1p - 2(0)p + p - \left(((0)p)^2 - 2(0)p^2 + p^2\right) = 2p - p^2 = p\,(2 - p) \end{aligned}$$

Parte b)
Como $Z_1, \ldots, Z_n$ son i.i.d. con $\mathbf{E}(Z) = 1 - p$ y $\mathbf{Var}(Z) = p\,(2 - p)$ por el Teorema Central del Límite existen $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ tales que

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{Z}_n - \mu}{\sigma}\right) \approx \mathbf{N}(0,1) \qquad (\text{si } n \to +\infty)$$

donde

$$\mu = \mathbf{E}(Z) = 1 - p$$
$$\sigma = \sqrt{\mathbf{Var}(Z)} = \sqrt{p\,(2 - p)}$$