UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA - Facultad de Ingeniería

PRIMER PARCIAL PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - Mayo 2000

Publicación de resultados: Viernes 9 de Junio hora 18.00.
Muestra de parciales: Viernes 16 de Junio hora 16.00.

Problemas

1. **(Total 16 puntos)** Una prueba de "múltiple opción" tiene dos preguntas.
   Cada pregunta contiene dos respuestas: una correcta y otra falsa.
   Contestar correctamente una pregunta significa ganar un punto, no contestar una pregunta ("en blanco") implica cero punto, y contestar mal implica perder un punto.
   De este modo la calificación final de la prueba estará entre -2 y 2.
   Diremos que un estudiante contesta "al tuntún" si

   - En cada pregunta sortea lo que va a hacer, de acuerdo con las siguientes probabilidades:

   $$\mathbf{P}\left(\text{“dejar una pregunta en blanco”}\right) = \mathbf{P}\left(\text{“responder la opción correcta”}\right) =$$

   $$= \mathbf{P}\left(\text{“responder la opción falsa”}\right) = \frac{1}{3}$$

   - Responde las distintas preguntas en forma independiente.

   Se considera la variable aleatoria

   $$X = \text{“la nota obtenida por un estudiante que contesta “al tuntún””}$$

   (a) **(10 puntos)** Hallar la probabilidad puntual p_X.

   (b) **(4 puntos)** Calcular $\mathbf{E}(X)$.

   (c) **(2 puntos)** Si un grupo de estudiantes muy numeroso contesta "al tuntún" e independientemente (no se copian !). ¿cuál será, aproximadamente, la calificación promedio que usted espera encontrar? Explique su respuesta.

2. **(Total 12 puntos)** Supongamos que las estadísticas sobre preferencias futbolística y lazos familiares se resumen en el siguiente cuadro:

Preferencia de los padres	Preferencia de los hijos: *Nacional*	*Peñarol*	*Otros*
Ambos progenitores de Nacional.	70%	10%	20%
Ambos progenitores de Peñarol.	10%	70%	20%
Un progenitor de Nacional y el otro de Peñarol.	40%	40%	20%
Un progenitor es de Nacional y el otro es de un cuadro que no es Nacional ni Peñarol.	60%	10%	30%
Un progenitor es de Peñarol. y el otro es de un cuadro que no es Nacional ni Peñarol.	10%	60%	30%
Ambos progenitores son de un cuadro que no es Nacional ni Peñarol.	20%	20%	60%

El Sr A es de Nacional y la Sra B es de Wanderers, y tienen un hijo C.
Por otro lado, y de manera totalmente independiente (así lo imponen la moral y las buenas costumbres!), el Sr D, que es de Nacional y la Sra E, que es de Peñarol, tienen una hija F.
Tiempo después C y F tienen un hijo G (nuevamente de manera totalmente independiente de los datos anteriores).
¿Cuál es la probabilidad de que G sea de Nacional?.

3. **(Total 12 puntos)** Se consideran dos variables aleatorias independientes X e Y tales que

$$X \sim \mathbf{Geo}\,(p) \qquad \text{e} \qquad Y \sim \mathbf{Geo}\,(q)$$

donde $0 < p < q < 1$.
(Se recuerda que:

$$X \sim \mathbf{Geo}\,(p) \Leftrightarrow p_X\,(n) = \mathbf{P}(X = n) = p\,(1-p)^{n-1} \qquad \forall n \in R_X = \{1, 2, \ldots\}\,)$$

Sea

$$H\,(p,q) \overset{def}{=} \mathbf{P}(X < Y)$$

(a) **(7 puntos)** Probar que $H\,(p,q) = \dfrac{p(1-q)}{p+q-pq}$ (realice los cálculos detallándolos paso a paso).

(b) **(2 puntos)** Probar que $H\,(p,q) < \dfrac{1-p}{2-p} \qquad \forall q \in (p, 1)$.

(c) **(3 puntos)**

i. Probar que $H\,(p,q) < \dfrac{1}{2} \qquad \forall 0 < p < q < 1$.

ii. El resultado anterior, desde un punto de vista intuitivo, ¿es razonable?. ¿Por qué?.

Soluciones

PRIMER PARCIAL DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA - Mayo 2000

Solución problema 1

(a) Consideremos como espacio muestral a

$$\Omega = \{(F,F),(F,B),(F,C),(B,F),(B,B),(B,C),(C,F),(C,B),(C,C)\}$$

donde $(F,F) = F$also en pregunta 1 y Falso en pregunta 2, $(F,B) = F$also en pregunta 1 y Blanco en pregunta 2, $(F,C) = F$also en pregunta 1 y Correcto en pregunta 2, etc. Tenemos que

$$R_X = \{-2,-1,0,1,2\}$$

Luego

$$[X=-2] = \{(F,F)\}$$

$$[X=-1] = \{(F,B),(B,F)\}$$

$$[X=0] = \{(F,C),(C,F),(B,B)\}$$

$$[X=1] = \{(B,C),(C,B)\}$$

$$[X=2] = \{(B,B)\}$$

y como cada pareja posible de respuesta tiene, por la independencia entre las preguntas, probabilidad $\frac{1}{9}$, se tiene que

$$p_X(-2) = p_X(2) = \frac{1}{9}$$

$$p_X(0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$p_X(-1) = p_X(1) = \frac{2}{9}$$

(b)

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=-2}^{k=2} k p_X(k) = (-2)\left(\frac{1}{9}\right) + (-1)\left(\frac{2}{9}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(\frac{2}{9}\right) + (2)\left(\frac{1}{9}\right) = 0$$

(c) Si se tiene n observaciones X_1, X_2, …,X_n independientes de la variable aleatoria X (es decir n notas independientes de estudiantes que contestaron "al tuntún") se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}}^{\text{nota promedio}} = \mathbf{E}(X) \qquad \text{(con probabilidad 1)}$$

Por lo tanto es de esperar que la nota promedio sea nula.

Solución problema 2

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ Nacional} \\ B \text{ Otro} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{10\%} \ C \text{ Peñarol } (i) \\ \xrightarrow{60\%} \ C \text{ Nacional } (ii) \\ \xrightarrow{30\%} \ C \text{ Otro } (iii) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} D \text{ Nacional} \\ E \text{ Peñarol} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{40\%} \ F \text{ Peñarol } (I) \\ \xrightarrow{40\%} \ F \text{ Nacional } (II) \\ \xrightarrow{20\%} \ F \text{ Otro } (III) \end{array}\right.$$

Puede ocurrir la situación (i) - (I)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Peñarol } (i) \\ F \text{ Peñarol } (I) \end{array}\right\} \xrightarrow{10\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es

$$\overbrace{(0.1)}^{\text{Prob. de que } C \text{ sea de Peñarol}} \quad \overbrace{(0.4)}^{\text{Prob. de que } E \text{ sea de Peñarol}} \quad \overbrace{(0.1)}^{\text{Prob. de que } G \text{ sea de Nacional en la situación } (i) \text{ - } (I)}$$

o la situación (i) - (II)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Peñarol } (i) \\ F \text{ Nacional } (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{40\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.1)\,(0.4)\,(0.4)$

o la situación (i) - (III)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Peñarol } (i) \\ F \text{ Otro } (III) \end{array}\right\} \xrightarrow{10\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.1)\,(0.2)\,(0.1)$

o la situación (ii) - (I)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Nacional } (ii) \\ F \text{ Peñarol } (I) \end{array}\right\} \xrightarrow{40\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.6)\,(0.4)\,(0.4)$

o la situación (ii) - (II)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Nacional } (ii) \\ F \text{ Nacional } (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{70\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.6)\,(0.4)\,(0.7)$

o la situación (ii) - (III)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Nacional } (ii) \\ F \text{ Otro } (III) \end{array}\right\} \xrightarrow{60\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.6)\,(0.2)\,(0.6)$

o la situación (iii) - (I)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Otro } (iii) \\ F \text{ Peñarol } (I) \end{array}\right\} \xrightarrow{10\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.3)\,(0.4)\,(0.1)$

o la situación (iii) - (II)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Otro } (iii) \\ F \text{ Nacional } (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{60\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.3)\,(0.4)\,(0.6)$

o la situación (iii) - (III)

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ Otro } (iii) \\ F \text{ Otro } (III) \end{array}\right\} \xrightarrow{20\%} G \text{ Nacional}$$

cuya probabilidad es $(0.3)\,(0.2)\,(0.2)$

Luego, como los casos anteriores son disjuntos, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(G \text{ Nacional}) &= (0.1)\,(0.4)\,(0.1) + (0.1)\,(0.4)\,(0.4) + (0.1)\,(0.2)\,(0.1) + \\ &+ (0.6)\,(0.4)\,(0.4) + (0.6)\,(0.4)\,(0.7) + (0.6)\,(0.2)\,(0.6) + \\ &+ (0.3)\,(0.4)\,(0.1) + (0.3)\,(0.4)\,(0.6) + (0.3)\,(0.2)\,(0.2) = 0.454\end{aligned}$$

Solución problema 3

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,(X<Y) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left([X=n]\cap[n<Y]\right)\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left([X=n]\cap\left[\bigcup_{m=n+1}^{+\infty} Y=m\right]\right)\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left([X=n]\cap\left[\bigcup_{m=n+1}^{+\infty} Y=m\right]\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}\,(X=n, Y=m) \text{ (por la independencia)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}\,(X=n)\,\mathbf{P}\,(Y=m) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=n+1}^{+\infty} p\,(1-p)^{n-1}\,q\,(1-q)^{m-1} = \\ &= pq\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}\sum_{m=n+1}^{+\infty}(1-q)^{m-1} \overset{(*)}{=} \\ &= pq\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}\,\frac{(1-q)^n}{q} = \\ &= p\,(1-q)\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}\,(1-q)^{n-1} =\end{aligned}$$

$$= p\,(1-q) \sum_{n=1}^{+\infty} [(1-p)\,(1-q)]^{n-1} =$$

$$= p\,(1-q)\,\frac{1}{1-(1-p)\,(1-q)} = \frac{p\,(1-q)}{p+q-pq}$$

$(*)$ Pues

$$\sum_{m=n+1}^{m=M} (1-q)^{m-1} = (1-q)^n + (1-q)^{n+1} + \ldots + (1-q)^{M-1}$$

$$(1-q) \sum_{m=n+1}^{m=M} (1-q)^{m-1} = (1-q)^{n+1} + (1-q)^n + \ldots + (1-q)^M$$

restando

$$q \sum_{m=n+1}^{m=M} (1-q)^{m-1} = (1-q)^n - (1-q)^M$$

$$\sum_{m=n+1}^{m=M} (1-q)^{m-1} = \frac{(1-q)^n - (1-q)^M}{q}$$

si $M \to +\infty$

$$\sum_{m=n+1}^{+\infty} (1-q)^{m-1} = \frac{(1-q)^n}{q}$$

(b) Consideremos p fijo, $0 < p < 1$ y pensemos a q como variable de la función

$$H(p,q) = \frac{p\,(1-q)}{p+q-pq} \qquad \text{con } q \in (p,1)$$

Luego como

$$\frac{\partial}{\partial q} H(p,q) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{p\,(1-q)}{p+q-pq}\right) = -\frac{p}{(p+q-pq)^2} < 0$$

la función es decreciente, por lo tanto

$$H(p,q) < H(p,p) = \frac{p\,(1-p)}{p+p-pp} = \frac{1-p}{2-p} \qquad \forall\ q \in (p,1)$$

(c) i. Como

$$g : g(p) = \frac{1-p}{2-p} = 1 - \frac{1}{2-p}$$

es una función decreciente de p, $0 < p < 1$. resulta que

$$g(p) < g(0) = \frac{1}{2}$$

esto es

$$\frac{1-p}{2-p} < \frac{1}{2} \qquad \text{con } 0 < p < 1$$

y usando la desigualdad anterior

$$H(p,q) < \frac{1}{2} \qquad \text{con } 0 < p < q < 1$$

ii. Lo anterior nos dice que

$$\mathbf{P}(X < Y) < \frac{1}{2}$$

es decir que

$$\mathbf{P}(X \geq Y) > \frac{1}{2}$$

En otras palabara el suceso $[X < Y]$ es menos probable que el suceso $[X \geq Y]$. Intuitivamente, si X representa la cantidad de veces que hay que repetir un experimento en forma independiente hasta que ocurra el suceso A con probabilidad p de ocurrir e Y representa la cantidad de veces que hay que repetir un experimento en forma independiente hasta que ocurra el suceso B con probabilidad q de ocurrir, como se tiene que $p < q$, es mas probable que ocurra antes B que A, es decir que es mas probable que Y sea menor que X .