Test de hipótesis II

Ejercicio 1

Denotemos por X la cantidad de clientes satisfechos en una muestra de tamaño $n = 1000$. Tenemos que $X_{\text{obs}} = 850$. La distribución nula de X es binomial de parámetros n y $p = 0.9$.

Como n es grande usaremos el test z. Usaremos entonces el estadístico

$$Z = \frac{X - n0.9}{\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = \frac{X - 900}{9.49}$$

El Z_{obs} es 5.27. La distribución nula de Z es $N(0,1)$.

Consideremos la región de rechazo $|Z| \geq c$. Determinamos c por la condición

$$0.05 = \mathbf{P}(|Z| \geq c | H_0) = 2(1 - \Phi(c))$$

de donde $\Phi(c) = 0.975$, es decir $c = 1.96$.

Como $|Z_{\text{obs}}| = 5.27 \geq 1.96$ rechazamos H_0. El p-valor es prácticamente cero.

Ejercicio 2

Denotamos por p la verdadera proporción de votantes a favor del uso de estos combustibles, $n = 500$ el tamaño de la muestra, X el número de votantes a favor en una muestra tomada al azar.

1. Si $p = 0.6$, la distribución de X es binomial de parámetros 500 y 0.6. Como n es grande podemos aproximar la distribución nula de X por una normal.

   Entonces

   $$\alpha = \mathbf{P}(X \geq 315 | p = 0.6) = \mathbf{P}\left(\frac{X - 300}{10.95} \geq 1.37\right) = 1 - \Phi(1.37) = 0.085.$$

2. Si $p = 0.75$, entonces

   $$\beta = \mathbf{P}(X \leq 315 | p = 0.75) = \mathbf{P}\left(\frac{X - 375}{9.68} \leq -6.2\right) \approx 0.$$

Ejercicio 3

Tenemos $n = 583$, $\overline{X}_{\text{obs}} = 37$ y $S_{\text{obs}} = 15.1$. Como n es grande aproximaremos la distribución de $\overline{X}$ usando el TCL. El parámetro de interés es μ la media de horas laborales por semana.

$H_0 : \mu = 40$ y $H_A : \mu \neq 40$.

Conviene estandarizar el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - 40}{15.1/\sqrt{(583)}}$$

Notar que no hemos dividido por σ pues es desconocido, pero podemos usar el TCL pues la muestra es grande.

El Z observado es $Z_{\text{obs}} = -4.797$.

El p-valor es

$$\mathbf{P}\left(|Z| \geq |Z_{\text{obs}}| \middle| H_0\right) = 2(1 - \Phi(4.797)) = 1.6 \times 10^{-6}.$$

Rechazamos H_0. El p-valor observado muestra que si H_0 fuese cierta, la probabilidad de observar algo tanto o más extremo que lo observado es del orden de una en un millón, y por eso decimos que H_0 no es creíble.

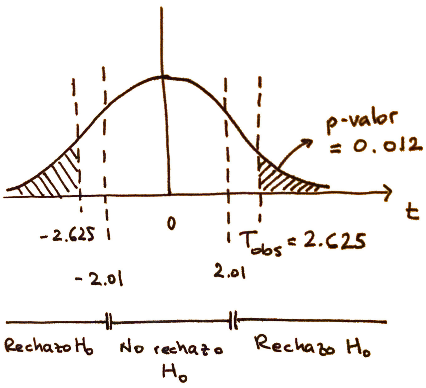
Ejercicio 4

Tenemos $n = 49$ datos normales, $\overline{X}_{\text{obs}} = 6.25$ y $S_{\text{obs}} = 6$.

1. Usaremos el estadístico
$$T = \frac{\overline{X} - 4}{6/\sqrt{49}}$$
que tiene distribución nula t de Student con 48 grados de libertad.

   Se trata de un test a dos colas, por lo que la región de rechazo es de la forma $|T| \geq c$. Determinamos c de la condición
$$0.05 = \mathbf{P}(|T| \geq c | H_0) = 2(1 - F(c))$$
en donde F es la fda de la t con 48 grados de libertad. Luego $F(c) = 0.975$, de donde $c = 2.01$.

   Como el $T_{\text{obs}} = 2.625 \geq 2.01$, rechazamos H_0.



2.

Ejercicio 5

Tenemos $n = 25$ datos normales, $\overline{X}_{\text{obs}} = 1.16$ y $S_{\text{obs}} = 0.20$. Usaremos $\alpha = 0.05$.

Queremos hacer el test $H_0 : \mu \leq 1$ contra $H_A : \mu > 1$.

Usaremos la región de rechazo $T \geq c$, en donde

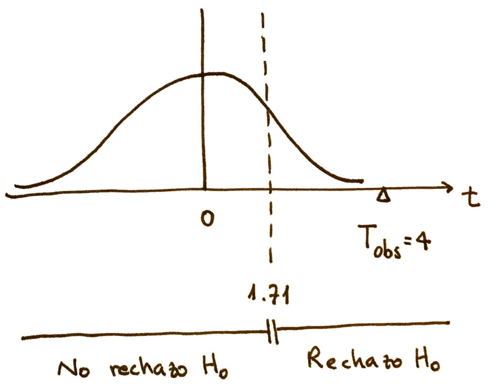
$$T = \frac{\overline{X} - 1}{0.2/\sqrt{25}}$$

que tiene distribución nula t de Student con 24 grados de libertad.

Determinamos c de la condición

$$0.05 = \mathbf{P}(T \geq c | H_0) = 1 - F(c)$$

en donde F es la fda de la t con 25 grados de libertad. Luego $F(c) = 0.95$, de donde $c = 1.71$.



Como el $T_{\text{obs}} = 4 \geq 1.71$, rechazamos H_0.

Ejercicio 6

La función de verosimilitud es

$$L(\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Como H_0 es simple, tenemos $L_0 = L(\theta_0)$.

Sabemos que el máximo de L se da en $\hat{\theta} = 1/\overline{X}_n$ el estimador de máxima verosimilitud de θ. Luego $L_{\max} = L(\hat{\theta})$.

Entonces, la razón de verosimilitud es

$$q_L = \frac{L_0}{L_{\max}} = \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i}}{(1/\overline{X}_n)^n e^{-n}} = (\theta_0 e)^n \left(\overline{X}_n e^{-\theta_0 \overline{X}_n}\right)^n$$

La región de rechazo es por definición $q_L \leq k$, que se puede escribir como

$$\overline{X}_n e^{-\theta_0 \overline{X}_n} \leq \frac{k^{1/n}}{\theta_0 e} = c.$$

Ejercicio 7

Queremos hacer el test $H_0 : \sigma^2 = 1$ contra $H_A : \sigma^2 > 1$.

Sabemos que $(n-1)S^2/\sigma^2$ tiene distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad. Usaremos esta información para construir el test.

Usaremos como estadístico $X = (n-1)S^2 = 11 \cdot S^2$. Suponiendo H_0 cierta, X tiene distribución χ^2 con 11 grados de libertad.

Como la alternativa es a una cola, consideramos la región de rechazo $X \geq c$. Determinamos c con la condición

$$0.05 = \mathbf{P}(X \geq c | H_0) = 1 - F(c)$$

en donde F es la fda de la χ^2 con 11 grados de libertad. De aquí resulta que $c = 19.68$.

El valor observado es $X_{\text{obs}} = 11 \cdot S^2_{\text{obs}} = 25.74$. Como cae en la región de rechazo, rechazamos H_0.

Ejercicio 8

Tenemos $k = 12$ meses. Disponemos de una tabla del tipo

Grupo	1	2	3	4	$\cdots$	k
Frecuencia	n_1	n_2	n_3	n_4	$\cdots$	n_k

La suma total es $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 16916$.

Denotemos por π_i la probabilidad de que una muerte accidental se produzca el mes i. Queremos realizar el test de bondad de ajuste

$$\begin{cases} H_0 : \pi_i = 1/12 \text{ para todo } i = 1, \dots, 12 \\ H_A : \pi_i \neq 1/12 \text{ para algún } i. \end{cases}$$

Para que el argumento sea general, denotemos por $p_i = 1/12$ para $i = 1, \dots, k$. El espacio de parámetros es

$$P = \left\{ \pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) : \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \right\}$$

que tiene dimensión $k - 1 = 11$ (todas las probabilidades posibles).

La hipótesis nula es simple, y afirma que $\pi_i = p_i$ para todo i. Llamemos $p = (p_1, \dots, p_k)$. Luego la dimensión de la hipótesis nula es 0.

Debemos calcular la razón de verosimilitud. La función de verosimilitud es

$$L(\pi) = n! \prod_{i=1}^{k} \frac{\pi_i^{n_i}}{n_i!}$$

ya que representa la probabilidad de que n_i datos caigan en el grupo i, para $i = 1, \dots, k$.

Por un lado

$$L_0 = L(p) = n! \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{n_i}}{n_i!}$$

ya que la hipótesis nula contiene solo al valor p para el parámetro.

En el teórico está demostrado (¡usando multiplicadores de Lagrange!) que el máximo de L variando en todos los posibles π se da cuando $\pi_i = \hat{\pi}_i = n_i/n$. Así que

$$L_{\max} = L(\hat{\pi}) = n! \prod_{i=1}^{k} \frac{\hat{\pi}_i^{n_i}}{n_i!}.$$

Luego, el cociente es

$$q_L = \frac{L_0}{L_{\max}} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i}{\hat{\pi}_i} \right)^{n_i}$$

Recordar que $Q_L = -2 \ln q_L$, de donde

$$\boxed{Q_L = 2 \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\ln \left(\frac{n_i}{n} \right) - \ln p_i \right)}$$

Esta fórmula vale siempre que hagamos un test de bondad de ajuste de este tipo (con H_0 simple).

i	n_i	n_i/n	$n_i \ln(n_i/n)$	p_i	$n_i \ln p_i$
1	1668	0.0986	-3864.15	0.0833	-4144.82
2	1407	0.0832	-3498.93	0.0833	-3496.26
3	1370	0.0810	-3443.43	0.0833	-3404.32
4	1309	0.0774	-3349.73	0.0833	-3252.74
5	1341	0.0793	-3399.23	0.0833	-3332.26
6	1338	0.0791	-3394.62	0.0833	-3324.81
7	1406	0.0831	-3497.44	0.0833	-3493.78
8	1446	0.0855	-3556.38	0.0833	-3593.18
9	1332	0.0787	-3385.38	0.0833	-3309.90
10	1363	0.0806	-3432.81	0.0833	-3386.93
11	1410	0.0834	-3503.39	0.0833	-3503.72
12	1526	0.0902	-3670.96	0.0833	-3791.97
Suma	16916	1.0000	-41996.43	1.0000	-42034.68
$(Q_L)_{\text{obs}}$	76.50				

Para calcular Q_L lo mejor es hacer una tabla como la siguiente:

Recordar que la región de rechazo es de la forma $Q_L \geq c$, en donde debemos elegir c con la condición

$$\mathbf{P}(Q_L \geq c|H_0) = \alpha$$

Además la distribución de Q_L se puede aproximar por una χ^2 con $k-1$ grados de libertad (en nuestro caso la dimensión de la hipótesis nula es cero).

Como $k-1 = 11$, usando $\alpha = 0.05$ tenemos que $c = 19.68$. Como $(Q_L)_{\text{obs}} = 76.5 \geq 19.68$, rechazamos H_0. Es decir, hay meses en los que se producen más muertes accidentales que en otros.

Ejercicio 9

Se trata de una tabla de contingencia del tipo

$$\begin{array}{ccc|c} n_{11} & \cdots & n_{1c} & n_{1.} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n_{r1} & \cdots & n_{rc} & n_{r.} \\ \hline n_{.1} & \cdots & n_{.c} & n \end{array}$$

En este caso, en el teórico vimos que

$$Q_L = 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij} \log\left(\frac{n_{ij}n}{n_{i.}n_{.j}}\right)$$

y se puede aproximar por una χ^2 con $(r-1)(c-1)$ grados de libertad.

El test compara H_0: las marginales son independientes con su negación H_A: las marginales son dependientes.

Para calcular Q_L debemos obtener primero la tabla de frecuencias esperadas si las marginales son independientes: es la tabla que contiene en las celdas los números $n_{i.}n_{.j}/n$.

La parte de cálculos es la que contiene cada uno de los términos que aparecen en la fórmula para Q_L. Luego simplemente se suman los cuatro valores para dar $(Q_L)_{\text{obs}} = 20.27$.

Observada	Columna 1	Columna 2
Fila 1	20	50
Fila 2	80	50
Esperada		
Fila 1	35	35
Fila 2	65	65
Cálculos		
	-11.19	17.83
	16.61	-13.12
$(Q_L)_{\text{obs}}$	20.27	

Los grados de libertad son en este caso $(2-1)(2-1) = 1$. Debemos rechazar H_0 si $Q_L \geq c$ en donde c es el valor crítico de $\chi^2(1)$ al nivel $\alpha = 0.05$. De la tabla vemos que $c = 3.84$, por lo que rechazamos H_0. Es decir, hay una dependencia entre el sexo y el uso del producto.

Ejercicio 10

El test compara H_0: las marginales son independientes con su negación H_A: las marginales son dependientes.

Para calcular Q_L debemos obtener primero la tabla de frecuencias esperadas si las marginales son independientes: es la tabla que contiene en las celdas los números $n_{i.}n_{.j}/n$.

Observada	Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Total
Fila 1	70	50	20	25	165
Fila 2	100	60	15	30	205
Fila 3	20	40	10	10	80
Total	190	150	45	65	450
Esperada					
Fila 1	69.67	55.00	16.50	23.83	165
Fila 2	86.56	68.33	20.50	29.61	205
Fila 3	33.78	26.67	8.00	11.56	80
Total	190	150	45	65	450
Cálculos					
	0.33	-4.77	3.85	1.19	
	14.44	-7.80	-4.69	0.39	
	-10.48	16.22	2.23	-1.45	
$(Q_L)_{\text{obs}}$	9.47				

Los grados de libertad en este caso son $(3-1)(4-1) = 6$. Trabajando al nivel $\alpha = 0.05$ el valor crítico es $c = 12.59$. Vemos entonces que no hay evidencia para rechazar H_0, es decir no hay evidencia suficiente para descartar que el tipo de papas fritas consumidas y la zona del país sean independientes.