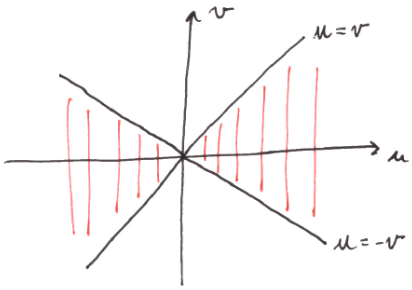
Normal, Student y Chi2

Ejercicio 1

1. Queremos $p = \mathbf{P}(|Y-10| < |X-10|)$. Llamemos
$$U\frac{X-10}{0.2}, \quad V = \frac{Y-10}{0.2}$$
que son normales estándar independientes.

   Entonces $p = \mathbf{P}(|V| < |U|)$. El evento $|V| < |U|$ se muestra en rojo en la siguiente figura:



   Luego $p = 1/2$ por la simetría rotacional.

2. Queremos $p = \mathbf{P}(X - 0.2 < Y < X)$. Llamemos $Z = X - Y$ que tiene distribución normal de media $10 - 10 = 0$ y varianza $0.2^2 + 0.2^2 = 0.08$. Luego
$$\begin{aligned} p &= P(-0.2 < Z < 0) \\ &= P\left(\frac{0.2}{\sqrt{0.08}} < \frac{Z}{\sqrt{0.08}} < 0\right) \\ &= \Phi(0) - \Phi\left(\frac{-0.2}{\sqrt{0.08}}\right) = 0.26 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sea $Z = X - Y$. Entonces Z es normal de media -1 y varianza $1 + \sigma^2$. Entonces
$$\begin{aligned} 1/3 &= P(X > Y) = P(X - Y > 0) = P(Z > 0) \\ &= P\left(\frac{Z+1}{\sqrt{1+\sigma^2}} > \frac{+1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{+1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$
De aquí se deduce que $\sigma = 2.1$.

Ejercicio 3

$\overline{X}$ tiene distribución normal de media 0 y varianza $1/16$. Luego
$$0.5 = \mathbf{P}\left(|\overline{X}| < c\right) = \mathbf{P}\left(|4\overline{X}| < 4c\right) = \Phi(4c) - \Phi(-4c) = 2\Phi(4c) - 1.$$

Entonces $\Phi(4c) = 1.5/2 = 0.75$, de donde $c = 0.6745/4 = 0.1686$.

Ejercicio 4

Llamemos F a la fda de la t de Student con 7 grados de libertad. Recordar que la densidad de la t es simétrica entorno al 0.

1. $0.9 = \mathbf{P}(|T| < t_0) = F(t_0) - F(-t_0) = 2F(t_0) - 1$. Entonces $F(t_0) = 1.9/2 = 0.95$, de donde $t_0 = 1.8946$.
2. $0.05 = \mathbf{P}(T > t_0) = 1 - F(t_0)$, de donde $F(t_0) = 0.95$ y t_0 es el mismo de antes.

Ejercicio 5

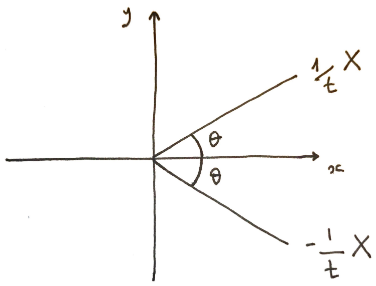
Por definición

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y^2}}$$

en donde X e Y son normales estándar independientes. La fda de T es entonces

$$F(t) = P(T \le t) = P\left(X \le t\sqrt{Y^2}\right)$$

El evento $\{X \le t\sqrt{Y^2}\}$ se muestra en la siguiente figura:



Luego, por la simetría rotacional

$$F(t) = 1 - \frac{2\theta}{2\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

Derivando obtenemos la densidad de T:

$$p(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\cdot\frac{1}{t^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$$

que es la densidad de la Cauchy.

Ejercicio 6

La distribución conjunta de X e Y es

$$p(x,y) = e^{-x-y}, \quad (x > 0, y > 0).$$

Luego, la fda de $Z = X/Y$ es

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) \\
&= P(X \leq zY) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{zy} e^{-x} e^{-y} dx dy \\
&= \frac{z}{1+z}
\end{aligned}$$

Derivando obtenemos la densidad $p(z) = 1/(1+z)^2$ para $z > 0$.

Ejercicio 7

Por la simetría rotacional, proyectar Y sobre la dirección de X tiene la misma distribución que proyectar Y sobre cualquier dirección fija. Luego la distribución de la proyección es normal estándar.

Ejercicio 8

Sabemos que $(n-1)S^2$ tiene distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad. Luego, la varianza de S^2 es

$$\operatorname{Var}\left(S^2\right) = \frac{1}{(n-1)^2} \operatorname{Var}\left(\chi^2(n-1)\right) = \frac{2}{n-1}.$$