Estimadores I

Errata

- Ejercicio 7 parte 3: queda una ecuación que no se puede resolver analíticamente.
- Ejercicio 10: la densidad debe ser $p(x;\theta) = (1/\theta)x^{(1-\theta)/\theta}$.

Ejercicio 1

1. La esperanza de la variable es

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{2}{3}\theta + 1 \times \frac{1}{3}\theta + 2 \times \frac{2}{3}(1-\theta) + 3 \times \frac{1}{3}(1-\theta) = \frac{7}{3} - 2\theta$$

El estimador de momentos lo obtenemos resolviendo $\overline{X}_n = \frac{7}{3} - 2\hat{\theta}$. Luego

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} - \overline{X}_n\right) = \frac{5}{12}.$$

2. La función de verosimilitud es

$$L(\theta) = \frac{2^5}{3^{10}}(1-\theta)^5\theta^5.$$

Tomamos logaritmo

$$\ell(\theta) = \ln\left(\frac{2^5}{3^{10}}\right) + 5\ln(1-\theta) + 5\ln\theta.$$

Derivamos

$$\ell'(\theta) = -\frac{5}{1-\theta} + \frac{5}{\theta} = 0$$

de donde $\hat{\theta} = 1/2$.

Ejercicio 2

1. La esperanza es $\mathrm{E}(X) = 1 \times \theta + 2 \times (1-\theta) = 2 - \theta$. El estimador de momentos es entonces

$$\hat{\theta} = 2 - \overline{X}_n = 2 - 5/3 = 1/3.$$

2. La función es $L(\theta) = \theta(1-\theta)^2$.
3. Tomamos logaritmo

$$\ell(\theta) = \ln\theta + 2\ln(1-\theta)$$

y derivando

$$\ell'(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} = 0$$

de donde $\hat{\theta} = 1/3$.

Ejercicio 3

Sea X el número de serie que obtenemos al elegir un objeto al azar. Entonces X tiene distribución uniforme discreta entre 1 y N.

La esperanza de X es $(N+1)/2$, por lo que el método de momentos produce el estimador

$$\hat{N} = 2X - 1 = 2(888) - 1 = 1775.$$

La función de verosimilitud es

$$L(N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } X \leq N \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego, el máximo se da cuando $\hat{N} = X = 888$.

Ejercicio 4

1. La probabilidad de que Beto tire la moneda 3 veces sin obtener cara es $(1-\theta)^3$. La probabilidad de que Ana lance 4 veces es $\theta(1-\theta)^3$. Luego $L(\theta) = \theta(1-\theta)^6$.
2. Tomamos logaritmo $\ell(\theta) = \ln\theta + 6\ln(1-\theta)$. Derivando e igualando a cero

   $$\ell'(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{6}{1-\theta} = 0$$

   de donde $\hat{\theta} = 1/7$.

Ejercicio 5

La esperanza de $X \sim U[0,a]$ es $\mathrm{E}(X) = a/2$. Luego el estimador de momentos es $\hat{a} = 2\overline{X}_n$. La esperanza de $\hat{a}$ es

$$\mathrm{E}(\hat{a}) = \mathrm{E}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} a/2 = a$$

por lo que $\hat{a}$ es insesgado.

Ejercicio 6

Sea $X_1, \ldots, X_n$ un muestreo aleatorio de $X \sim \mathrm{Geo}(p)$. La función de verosimilitud es

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{X_i - 1} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}.$$

Tomando logaritmos

$$\ell(p) = n\left(\ln(p) + (\overline{X}_n - 1)\ln(1-p)\right)$$

Derivando e igualando a cero obtenemos

$$\ell'(p) = n\left(\frac{1}{p} - (\overline{X}_n - 1)\frac{1}{1-p}\right) = 0$$

de donde $\hat{p} = 1/\overline{X}_n$.

Ejercicio 7

1. $\int_{-1}^{1} c(1+\theta x)dx = 1 \Leftrightarrow c = 1/2$.
2. La esperanza es
$$\int_{-1}^{1} x(1+\theta x)/2dx = \theta/3$$
Luego el estimador de momentos de θ es $\hat{\theta} = 2\overline{X}_n$.
3. La función de verosimilitud es
$$L(\theta) = \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(1+\theta X_i)$$
Tomando logaritmo
$$\ell(\theta) = -n\ln 2 + \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\theta X_i).$$
Derivando e igualando a cero
$$\ell'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{1+\theta X_i} = 0.$$
Ups, ¡esta ecuación es imposible de resolver analíticamente! En estos casos se deben usar métodos numéricos para resolverla.

Ejercicio 8

La función de verosimilitud es
$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^{2n}}(X_1\cdots X_n)e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$
Tomando logaritmo
$$\ell(\theta) = -2n\ln\theta + \ln(X_1\cdots X_n) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$
Derivando e igualando a cero
$$\ell'(\theta) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$
de donde $\hat{\theta} = \overline{X}_n/2$.

Ejercicio 9

La función de verosimilitud es
$$L(\theta) = \frac{1}{2^n\theta^{3n}}(X_1\cdots X_n)^2 e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$
Tomando logaritmo
$$\ell(\theta) = -n\ln(2) - 3n\ln\theta + 2\ln(X_1\cdots X_n) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Derivando e igualando a cero

$$\ell'(\theta) = -\frac{3n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

de donde $\hat{\theta} = \overline{X}_n/3$.

Ejercicio 10

Errata: la densidad es $p(x;\theta) = (1/\theta)x^{(1-\theta)/\theta}$.

La función de verosimilitud es

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n}(X_1 \cdots X_n)^{(1-\theta)/\theta}$$

Tomando logaritmo

$$\ell(\theta) = -n\ln\theta + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$

Derivando e igualando a cero

$$\ell'(\theta) = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0$$

que tiene como solución

$$\hat{\theta} = -(1/n)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i.$$