Test de permutaciones II

Ejercicio 1

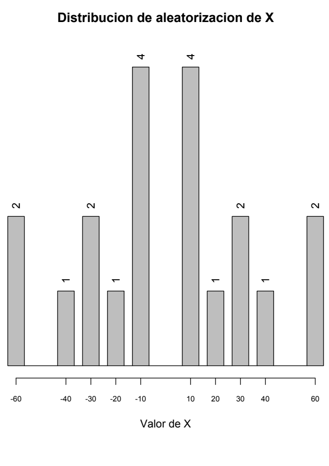
1. H_0: no hay diferencia entre las terapias. De forma equivalente, $r_i^{(\text{terapia 1})} = r_i^{(\text{terapia 2})}$ para todos los pacientes $i = 1, \dots, 6$.

   Al no disponer de información adicional sobre qué terapia es mejor, debemos calcular un p-valor a dos colas.

   Hay $\binom{6}{3} = 20$ asignaciones posibles igualmente probables.

Terapia 1			Terapia 2			Suma 1	Suma 2	Diferencia
30	45	45	10	20	30	120	60	60
30	45	10	45	20	30	85	95	-10
30	45	20	45	10	30	95	85	10
30	45	30	45	10	20	105	75	30
30	45	10	45	20	30	85	95	-10
30	45	20	45	10	30	95	85	10
30	45	30	45	10	20	105	75	30
30	10	20	45	45	30	60	120	-60
30	10	30	45	45	20	70	110	-40
30	20	30	45	45	10	80	100	-20
45	45	10	30	20	30	100	80	20
45	45	20	30	10	30	110	70	40
45	45	30	30	10	20	120	60	60
45	10	20	30	45	30	75	105	-30
45	10	30	30	45	20	85	95	-10
45	20	30	30	45	10	95	85	10
45	10	20	30	45	30	75	105	-30
45	10	30	30	45	20	85	95	-10
45	20	30	30	45	10	95	85	10
10	20	30	30	45	45	60	120	-60

   Luego, el estadístico X igual a la diferencia de la suma de respuestas en la terapia 1 menos la suma de respuestas de la terapia 2 tiene distribución de aleatorización dada por la siguiente figura:



Vemos entonces que el p-valor es entonces

$$\text{pval}(X_{\text{obs}}) = 2\mathbf{P}(X \geq 60) = 4/20 = 1/5 = 0.2$$

lo cual no es evidencia suficiente para rechazar H_0.

2. Trabajaremos con el nivel de significancia $\alpha = 0.1$ pues disponemos de pocos datos (ver comentario sobre el final de la solución).

   Si restamos Δ a las respuestas del grupo Terapia 1 y volvemos a hacer la tabla de asignaciones obtenemos:

Terapia 1			Terapia 2			Suma 1	Suma 2	Diferencia
$30-\Delta$	$45-\Delta$	$45-\Delta$	10	20	30	$120-3\Delta$	60	$60-3\Delta$
$30-\Delta$	$45-\Delta$	10	$45-\Delta$	20	30	$85-2\Delta$	$95-\Delta$	$-10-\Delta$
$30-\Delta$	$45-\Delta$	20	$45-\Delta$	10	30	$95-2\Delta$	$85-\Delta$	$10-\Delta$
$30-\Delta$	$45-\Delta$	30	$45-\Delta$	10	20	$105-2\Delta$	$75-\Delta$	$30-\Delta$
$30-\Delta$	$45-\Delta$	10	$45-\Delta$	20	30	$85-2\Delta$	$95-\Delta$	$-10-\Delta$
$30-\Delta$	$45-\Delta$	20	$45-\Delta$	10	30	$95-2\Delta$	$85-\Delta$	$10-\Delta$
$30-\Delta$	$45-\Delta$	30	$45-\Delta$	10	20	$105-2\Delta$	$75-\Delta$	$30-\Delta$
$30-\Delta$	10	20	$45-\Delta$	$45-\Delta$	30	$60-\Delta$	$120-2\Delta$	$-60+\Delta$
$30-\Delta$	10	30	$45-\Delta$	$45-\Delta$	20	$70-\Delta$	$110-2\Delta$	$-40+\Delta$
$30-\Delta$	20	30	$45-\Delta$	$45-\Delta$	10	$80-\Delta$	$100-2\Delta$	$-20+\Delta$
$45-\Delta$	$45-\Delta$	10	$30-\Delta$	20	30	$100-2\Delta$	$80-\Delta$	$20-\Delta$
$45-\Delta$	$45-\Delta$	20	$30-\Delta$	10	30	$110-2\Delta$	$70-\Delta$	$40-\Delta$
$45-\Delta$	$45-\Delta$	30	$30-\Delta$	10	20	$120-2\Delta$	$60-\Delta$	$60-\Delta$
$45-\Delta$	10	20	$30-\Delta$	$45-\Delta$	30	$75-\Delta$	$105-2\Delta$	$-30+\Delta$
$45-\Delta$	10	30	$30-\Delta$	$45-\Delta$	20	$85-\Delta$	$95-2\Delta$	$-10+\Delta$
$45-\Delta$	20	30	$30-\Delta$	$45-\Delta$	10	$95-\Delta$	$85-2\Delta$	$10+\Delta$
$45-\Delta$	10	20	$30-\Delta$	$45-\Delta$	30	$75-\Delta$	$105-2\Delta$	$-30+\Delta$
$45-\Delta$	10	30	$30-\Delta$	$45-\Delta$	20	$85-\Delta$	$95-2\Delta$	$-10+\Delta$
$45-\Delta$	20	30	$30-\Delta$	$45-\Delta$	10	$95-\Delta$	$85-2\Delta$	$10+\Delta$
10	20	30	$30-\Delta$	$45-\Delta$	$45-\Delta$	60	$120-3\Delta$	$-60+3\Delta$

   El nuevo valor observado es ahora $(X_\Delta)_{\text{obs}} = 60-3\Delta$. Para determinar el intervalo de valores creíbles de Δ conviene empezar por valores grandes (tanto positivos como negativos). Si $\Delta < 0$, entonces $60-3\Delta$ es el valor más grande de todos, por lo que solo hay una asignación con valor mayor o igual a ella. Esto es así hasta que $60-3\Delta = 60-\Delta$ cuando $\Delta = 0$. Si $\Delta > 0$ y grande, $60-3\Delta$ es el menor de todos, seguido por $-10-\Delta$. Esto es así hasta que $60-3\Delta = -10-\Delta$ cuando $\Delta = 35$. Entonces el intervalo es $[0,35]$.

   Comentario: si usamos $\alpha = 0.05$ el intervalo es $[-\infty,\infty]$ ya que el p-valor a dos colas el como mínimo 0.1. Esto quiere decir que al nivel de exigencia 0.05 la conclusión es trivial, y esto es porque no tenemos suficientes datos para decir algo mejor.

Ejercicio 2

1. Elegimos X igual a la suma de rendimientos con el catalizador A menos la suma de rendimientos con el catalizador B.
2. Queremos un rendimiento similar al actual, por lo que tanto un rendimiento es inferior o superior indicaría una diferencia. Esto sugiere usar un p-valor a dos colas.

3. Restamos Δ a los tres rendimientos del catalizador. Hay 20 asignaciones posibles:

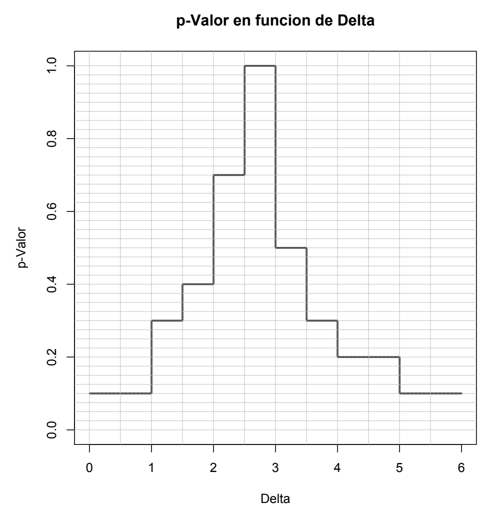
Catalizador A			Catalizador B			Suma A	Suma B	Diferencia
$92-\Delta$	$94-\Delta$	$92-\Delta$	89	91	90	$278-3\Delta$	270	$8-3\Delta$
$92-\Delta$	$94-\Delta$	89	$92-\Delta$	91	90	$275-2\Delta$	$273-\Delta$	$2-\Delta$
$92-\Delta$	$94-\Delta$	91	$92-\Delta$	89	90	$277-2\Delta$	$271-\Delta$	$6-\Delta$
$92-\Delta$	$94-\Delta$	90	$92-\Delta$	89	91	$276-2\Delta$	$272-\Delta$	$4-\Delta$
$92-\Delta$	$92-\Delta$	89	$94-\Delta$	91	90	$273-2\Delta$	$275-\Delta$	$-2-\Delta$
$92-\Delta$	$92-\Delta$	91	$94-\Delta$	89	90	$275-2\Delta$	$273-\Delta$	$2-\Delta$
$92-\Delta$	$92-\Delta$	90	$94-\Delta$	89	91	$275-2\Delta$	$274-\Delta$	$1-\Delta$
$92-\Delta$	89	91	$94-\Delta$	$92-\Delta$	90	$272-\Delta$	$276-2\Delta$	$-4+\Delta$
$92-\Delta$	89	90	$94-\Delta$	$92-\Delta$	91	$271-\Delta$	$277-2\Delta$	$-6+\Delta$
$92-\Delta$	91	90	$94-\Delta$	$92-\Delta$	89	$273-\Delta$	$275-2\Delta$	$-2+\Delta$
$94-\Delta$	$92-\Delta$	89	$92-\Delta$	91	90	$275-2\Delta$	$273-\Delta$	$2-\Delta$
$94-\Delta$	$92-\Delta$	91	$92-\Delta$	89	90	$277-2\Delta$	$271-\Delta$	$6-\Delta$
$94-\Delta$	$92-\Delta$	90	$92-\Delta$	89	91	$276-2\Delta$	$272-\Delta$	$4-\Delta$
$94-\Delta$	89	91	$92-\Delta$	$92-\Delta$	90	$274-\Delta$	$275-2\Delta$	$-1+\Delta$
$94-\Delta$	89	90	$92-\Delta$	$92-\Delta$	91	$273-\Delta$	$275-2\Delta$	$-2+\Delta$
$94-\Delta$	91	90	$92-\Delta$	$92-\Delta$	89	$275-\Delta$	$273-2\Delta$	$2+\Delta$
$92-\Delta$	89	91	$92-\Delta$	$94-\Delta$	90	$272-\Delta$	$276-2\Delta$	$-4+\Delta$
$92-\Delta$	89	90	$92-\Delta$	$94-\Delta$	91	$271-\Delta$	$277-2\Delta$	$-6+\Delta$
$92-\Delta$	91	90	$92-\Delta$	$94-\Delta$	89	$273-\Delta$	$275-2\Delta$	$-2+\Delta$
89	91	90	$92-\Delta$	$94-\Delta$	$92-\Delta$	270	$278-3\Delta$	$-8+3\Delta$

Trabajaremos al nivel $\alpha = 0.1$ ya que disponemos de pocos datos. Notar que para $\Delta = 0$ el p-valor es 0.1 y por lo tanto rechazamos H_0.

Para $\Delta < 0$ el valor $8-3\Delta$ sigue siendo el mayor, por lo que el p-valor es siempre 0.1. Para $\Delta \geq 0$, el valor $8-3\Delta$ empieza a decrecer, hasta que coincide con algún otro. Coincidirá primero con $6-\Delta$ que es el segundo mayor cuando $\Delta = 1$.

Para Δ muy grande, $8-3\Delta$ es el menor de todos, seguido por $-2-\Delta$. Entonces el p-valor es 0.1 hasta que $8-3\Delta = -2-\Delta$, o sea hasta $\Delta = 5$. Entonces el intervalo de valores creíbles de Δ es $[1,5]$.

Esto quiere decir que podemos afirmar que el catalizador A aumenta el rendimiento en $\Delta \in [1,5]$. En particular no son iguales los rendimientos ya que el 0 no está en el intervalo.



No es necesario graficar la función p-valor en función de Δ, pero para corroborar que lo hecho es equivalente a usar el gráfico, se puede ver que la horizontal por 0.1 corta el gráfico en 1 y 5 respectivamente.

Ejercicio 3

1. Elegimos X igual a la suma de distancias con la marca 1 menos la suma de de distancias con la marca 2. Queremos ver si las distancias son similares, por lo tanto si la distancia de la marca 1 es inferior o superior a la marca 2 indicaría una diferencia. Esto sugiere usar un p-valor a dos colas.

   Se indica trabajar con $\alpha = 0.1$. Poniendo en la tabla $\Delta = 0$ vemos que solamente una asignación tiene diferencia al menos 65, por lo que el p-valor es 0.1. Entonces rechazamos H_0.

2. Restamos Δ a las tres distancias de la marca 1. Hay 20 asignaciones posibles:

Marca 1			Marca 2			Marca 1	Marca 2	Diferencia
$275-\Delta$	$285-\Delta$	$280-\Delta$	260	255	260	$840-3\Delta$	775	$65-3\Delta$
$275-\Delta$	$285-\Delta$	260	$280-\Delta$	255	260	$820-2\Delta$	$795-\Delta$	$25-\Delta$
$275-\Delta$	$285-\Delta$	255	$280-\Delta$	260	260	$815-2\Delta$	$800-\Delta$	$15-\Delta$
$275-\Delta$	$285-\Delta$	260	$280-\Delta$	260	255	$820-2\Delta$	$795-\Delta$	$25-\Delta$
$275-\Delta$	$280-\Delta$	260	$285-\Delta$	255	260	$815-2\Delta$	$800-\Delta$	$15-\Delta$
$275-\Delta$	$280-\Delta$	255	$285-\Delta$	260	260	$810-2\Delta$	$805-\Delta$	$5-\Delta$
$275-\Delta$	$280-\Delta$	260	$285-\Delta$	260	255	$815-2\Delta$	$800-\Delta$	$15-\Delta$
$275-\Delta$	260	255	$285-\Delta$	$280-\Delta$	260	$790-\Delta$	$825-2\Delta$	$-35+\Delta$
$275-\Delta$	260	260	$285-\Delta$	$280-\Delta$	255	$795-\Delta$	$820-2\Delta$	$-25+\Delta$
$275-\Delta$	255	260	$285-\Delta$	$280-\Delta$	260	$790-\Delta$	$825-2\Delta$	$-35+\Delta$
$285-\Delta$	$280-\Delta$	260	$275-\Delta$	255	260	$825-2\Delta$	$790-\Delta$	$35-\Delta$
$285-\Delta$	$280-\Delta$	255	$275-\Delta$	260	260	$820-2\Delta$	$795-\Delta$	$25-\Delta$
$285-\Delta$	$280-\Delta$	260	$275-\Delta$	260	255	$825-2\Delta$	$790-\Delta$	$35-\Delta$
$285-\Delta$	260	255	$275-\Delta$	$280-\Delta$	260	$800-\Delta$	$815-2\Delta$	$-15+\Delta$
$285-\Delta$	260	260	$275-\Delta$	$280-\Delta$	255	$805-\Delta$	$810-2\Delta$	$-5+\Delta$
$285-\Delta$	255	260	$275-\Delta$	$280-\Delta$	260	$800-\Delta$	$815-2\Delta$	$-15+\Delta$
$280-\Delta$	260	255	$275-\Delta$	$285-\Delta$	260	$795-\Delta$	$820-2\Delta$	$-25+\Delta$
$280-\Delta$	260	260	$275-\Delta$	$285-\Delta$	255	$800-\Delta$	$815-2\Delta$	$-15+\Delta$
$280-\Delta$	255	260	$275-\Delta$	$285-\Delta$	260	$795-\Delta$	$820-2\Delta$	$-25+\Delta$
260	255	260	$275-\Delta$	$285-\Delta$	$280-\Delta$	775	$840-3\Delta$	$-65+3\Delta$

   Veamos qué ocurre en los casos extremos. Si $\Delta < 0$, el valor $65-3\Delta$ seguirá siendo el mayor, por lo que el p-valor es 0.1. Cuando $\Delta > 0$ pero pequeño, $65-3\Delta$ es el mayor, seguido por $35-\Delta$. El p-valor cambiará entonces cuando $65-3\Delta = 35-\Delta$, o sea para $\Delta = 15$. Cuando $\Delta > 0$ es muy grande, $65-3\Delta$ es el menor de todos, seguido por $5-\Delta$. Esto es así hasta que $65-3\Delta = 5-\Delta$, lo cual ocurre en $\Delta = 30$. Luego, el intervalo es $\Delta \in [15, 30]$. Es decir, las pelotas de la marca 1 recorren una distancia mayor que las de la marca 2, en al menos 15 m y a lo sumo 30 m.

Ejercicio 4

1. Debemos hacer un p-valor a una cola. El valor observado es $X_{\text{obs}} = 97$, y hay $\binom{12}{6} = 924$ asignaciones posibles. Luego $\text{pval}(97) = \mathbf{P}(X \geq 97) = 1/924 = 0.0011$, por lo que tenemos evidencia más que suficiente para rechazar H_0, por lo que hay evidencia para afirmar que el chocolate negro mejora la capacidad antioxidante de la sangre.

2. Usaremos $\alpha = 0.05$. Trazando la horizontal a la altura 0.05 vemos que $\Delta \in [14, +\infty)$.

Ejercicio 5

Si usamos $\alpha = 0.1$, de la figura vemos que $\Delta \in [-16.5, 4.5]$, que es una diferencia posiblemente mayor a 10 (en valor absoluto). No recomendamos el nuevo catalizador. Para que la diferencia sea menor a 10 deberíamos tolerar un nivel de significancia de $\alpha = 0.45$, lo cual es demasiado (casi como tirar una moneda).