Test de permutaciones I

Ejercicio 1

1. Las 6 asignaciones posibles son

Terapia 1		Terapia 2	
1	2	3	4
1	3	2	4
1	4	2	3
2	3	1	4
2	4	1	3
3	4	1	2

2. Las medias de cada grupo y sus diferencias son

Terapia 1		Terapia 2		Media 1	Media 2	Diferencia
30	60	20	30	45	25	20
30	20	60	30	25	45	-20
30	30	60	20	30	40	-10
60	20	30	30	40	30	10
60	30	30	20	45	25	20
20	30	30	60	25	45	-20

3. La hipótesis nula es que no hay diferencia entre las terapias. Esto quiere decir que la respuesta para la terapia 1 es igual a la respuesta para la terapia 2, para todos los pacientes.

4. Si H_0 es cierta, al intercambiar un paciente por otro entre las dos terapias no cambiará su respuesta. Como las asignaciones son igualmente probables también lo son los valores de las diferencias de promedios. Esto implica que la distribución nula es

$$P(-20) = 2/6, \quad P(-10) = 1/6, \quad P(10) = 1/6, \quad P(20) = 2/6.$$

5. El $X_{\text{obs}} = 20$, y el p-valor a una cola es $\text{pval}(20) = 2/6 = 1/3$. Esto quiere decir que si H_0 es cierta, no hay diferencia entre las terapias, entonces si repitiéramos el experimento varias veces veríamos una de cada tres un resultado extremo de 20 o más.

Ejercicio 2

1. La variable de respuesta en este experimento es si los pacientes recaen o no.

   Consideramos

$$r_i^D = \begin{cases} 1 & \text{si el paciente i recae con el tratamiento D} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$r_i^L = \begin{cases} 1 & \text{si el paciente i recae con el tratamiento } L \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

2. $H_0 : r_i^D = r_i^L$ para todo $i = 1, \ldots, 48$

3. Podemos considerar una urna con 48 bolillas de las cuales 28 son rojas para representar las recaídas y el resto son negras. Sacamos 24 bolillas de la urna para el primer grupo y las bolillas que quedan forman el segundo grupo.

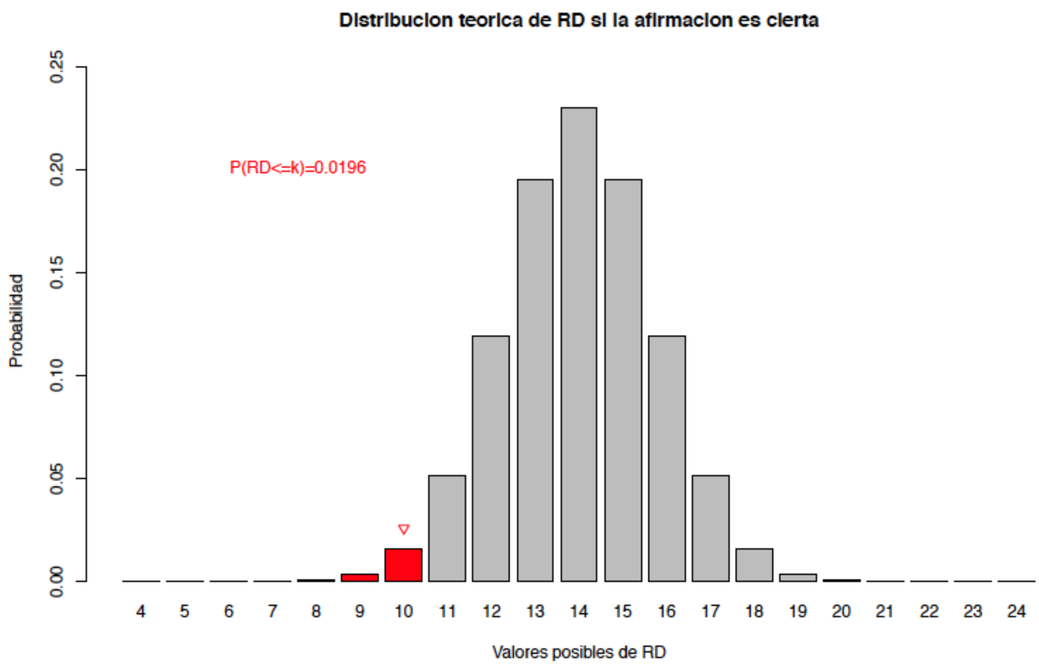
4. *a*) En el grupo tratado con desipramina hubo 10 recaídas, entonces el valor de R_D observado es 10. En el grupo tratado con litio hubo 18 recaídas, entonces el valor de R_L observado es 18.

   b) $R_D + R_L$ es el número total de recaídas, es decir 28.

   $P(R_D = n)$ es la probabilidad de que saquemos n bolillas rojas y $24 - n$ bolillas negras de la urna para armar el grupo D, entonces: $R_D \sim H(48, 28, 24)$.

$$P\left(R_D = n\right) = \frac{\binom{28}{n}\binom{20}{24-n}}{\binom{48}{24}} \text{ para todo } n = 4, \ldots, 24$$

5. $(RD)_{\text{obs}} = 10$ y $\text{pval}\left(X_{\text{obs}}\right) = P(X \leq X_{\text{obs}}) = 0.0196$.



Ejercicio 3

1. Modelamos la formación de los grupos considerando una urna con 29 bolillas (que representan los pacientes que participan en el estudio) de las cuales 17 son rojas para representar el número total de curados y el resto son blancas y representan los pacientes que no se curaron. Luego una asignación corresponde a sacar 16 bolillas al azar de la urna para formar el grupo Trasplante y las bolillas que permanencen en la urna forman el grupo Vancomicina.

Luego $X \sim H(29, 17, 16)$

Buscamos el menor c tal que $P(X \in I_r(c)|H_0) \leq 0.05$.

$P(X \geq 13) = 0.0084$

$P(X \geq 12) = 0.053$

Entonces $c = 13$

2. $X_{\text{obs}} = 13 \in [13, \infty)$, entonces rechazamos H_0.
3. $\text{pval}(13) = P(X \geq 13) = 0.0084 \leq 0.05$, entonces rechazamos H_0.

Ejercicio 4

1. La respuesta es en este caso 1 cuando la persona siente mejoría en su condición física y 0 si no.

   H_0: la condición física no se ve afectada por los horarios fijos/cambiantes de las comidas.

   Es decir, $r^{\text{fijo}} = r^{\text{camb}}$ para todos los individuos.
2. Bajo H_0 la asignación es equivalente a extraer 11 bolillas de una urna con 17 bolillas en total, de las cuales 11 son rojas (mejoría) y 6 blancas. Las 6 bolillas que queden en la urna son las que corresponden al grupo de horarios cambiantes. El estadístico X es en este caso la cantidad de bolillas rojas extraídas, y tiene por lo tanto distribución $H(17, 11, 11)$. Notar que $5 \leq X \leq 11$.
3. El $X_{\text{obs}} = 9$ y como no se tiene información previa es mejor calcular un p-valor a dos colas. Valores de X cercanos a los extremos (5 y 11) son indicativos de que H_0 es falsa. En este caso el p-valor es $\text{pval}(9) = 2\,\text{mín}\{P(X \geq 9), P(X \leq 9)\} = 2 \times 0.072 = 0.144$. Entonces no hay evidencia suficiente para rechazar H_0.

Ejercicio 5

1. H_0: el tratamiento no tiene efecto sobre la sobrevida a 4 años de los árboles.

   La respuesta es en este caso 1 si el árbol está vivo luego de 4 años y 0 si no. La H_0 quiere decir que $r^T = r^C$ para todos los árboles.
2. H_0 implica que la cantidad de árboles vivos luego de 4 años es constante igual a 5. Podemos modelar la asignación con una urna que contiene 24 bolillas, 5 rojas (vivos) y 19 blancas, de la cual extraemos sin reposición 17 (tratamiento). Las 7 que quedan en la urna representan los árboles de control.

   Sea X el número de bolitas rojas en la muestra de 17. Cada valor posible $X = x$ determina la tabla completamente, pues los márgenes de la tabla son fijos:

$2+x$	$17-x$
$5-x$	x

   Hay 6 tablas posibles:

2	17
5	0

3	16
4	1

4	15
3	2

5	14
2	3

6	13
1	4

7	12
0	5

3. La probabilidad de cada tabla es

$$P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{19}{17-x}}{\binom{24}{17}}$$

   y los valores son

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	.0005	.0140	.1120	.3360	.3920	.1456

4. Debemos calcular un p-valor a dos colas pues no disponemos de indicación sobre conocimientos previos. Así pval$(5) = 2 \times P(X \geq 5) = 0.2912$. No hay evidencia para rechazar H_0.

Ejercicio 6

1. H_0: el modelo no tiene efecto sobre la satisfacción de los clientes.

   La respuesta es en este caso 1 si el cliente está satisfecho con la página web y 0 si no. La H_0 quiere decir que $r^A = r^B$ para todos los clientes.

2. H_0 implica que la cantidad de clientes satisfechos es constante igual a 29. Podemos modelar la asignación con una urna que contiene 40 bolillas, 29 rojas (satisfechos) y 11 blancas, de la cual extraemos sin reposición 20 (A). Las 20 que quedan en la urna representan los clientes de B.

   Sea X el número de bolitas rojas en la muestra de 20. Cada valor posible $X = x$ determina la tabla completamente, pues los márgenes de la tabla son fijos:

$20 - x$	$x - 9$
x	$29 - x$

   Hay 12 tablas posibles:

11	0
9	20

10	1
10	19

9	2
11	18

8	3
12	17

7	4
13	16

6	5
14	15

5	6
15	14

4	7
16	13

3	8
17	12

2	9
18	11

1	10
19	10

0	11
20	9

3. El estadístico más adecuado es X el número que aparece en el casillero inferior izquierdo (número de bolillas rojas en la muestra de 20)

4. Debemos calcular un p-valor a dos colas pues no disponemos de indicación sobre conocimientos previos. Así pval$(18) = 2 \times P(X \geq 18) = 2 \times 0.0155 = 0.031$. Rechazamos H_0.

Ejercicio 7

1. Se considera

$$H_0 : \text{El tratamiento no tiene efecto sobre el tiempo de secado}$$

   y el estadístico $X =$ (suma de respuestas en tratamiento)-(suma de respuestas en control).

   A partir del diagrama de tallos se obtiene que $X_{obs} = 177 - 193 = -16$. Al asumir que el tratamiento no aumenta el tiempo de secado, las opciones son que reduzca o no tenga efecto, por lo tanto nos planteamos el test a una cola de donde $pval(X_{obs}) = P(X \leq X_{obs}) = P(X \leq -16)$. De la Figura 1 (distribución de aleatorización de X) se obtiene que

$$pval(X_{obs}) = P(X \leq -16) = \frac{44+9+2}{C_8^{16}} = \frac{55}{12870} = 0.00427 < p_u = 0.05$$

   Por lo tanto, hay evidencia para rechazar H_0, es decir para afirmar que el tratamiento reduce el tiempo de secado.

2. Consideramos la región de rechazo $I_r(c) = (-\infty, c]$ y buscamos el máximo c tal que:

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(X \in I_r(c)|H_o) = P(X \leq c|H_0) \leq 0.05$$

   De la Fig. 1 se obtiene que:

   - si $c = -12$ entonces $\alpha = \frac{412}{12870} = 0.032$.
   - si $c = -10$ entonces $\alpha = \frac{871}{12870} = 0.0646$.

   Por lo tanto $c = -12$, es decir la región de rechazo es $I_r = (-\infty, -12]$. Dado que $X_{obs} = -16 \in I_r$, entonces se rechaza H_0.

Ejercicio 8

El valor observado de X es $X_{\text{obs}} = 484 - 477 = 7$.

1. De la figura deducimos que el p-valor es

$$\text{pval}(7) = \mathbf{P}(X \geq 7) = \frac{3257}{12870} = 0.253$$

   y como es mayor que 0.05 no se rechaza H_0.

2. Como $\alpha \times 12870 = 643.5$, debemos buscar el menor valor de c tal que la suma de las barras es menor o igual a 643. Para $c = 15$ la suma es 570, y para $c = 13$ la suma es 1085. Luego el menor valor es $c = 15$. Como $X_{\text{obs}} = 7 \notin [15, +\infty)$, no se rechaza H_0.

Ejercicio 9

1. Se considera

$$H_0 : \text{El tratamiento no tiene efecto sobre la tensión disruptiva del material}$$

y el estadístico

$$X = (\text{suma de respuestas en tratamiento}) - (\text{suma de respuestas en control}).$$

A partir del diagrama de tallos se obtiene que $X_{\text{obs}} = 177 - 193 = -16$. Al asumir que el tratamiento no aumenta la tensión disruptiva, las opciones son que reduzca o no tenga efecto, por lo tanto nos planteamos el test a una cola de donde $\text{pval}\,(X_{\text{obs}}) = P(X \leq X_{\text{obs}}) = P(X \leq -16)$. De la Figura asociada se obtiene que

$$\text{pval}\,(X_{\text{obs}}) = P(X \leq 16) = (44+9+2)/C_8^{16} = 55/12870 = 0.00427 < p_u = 0.05.$$

Por lo tanto, hay evidencia para rechazar H_0, es decir para afirmar que el químico tiene efecto sobre la tensión disruptiva.

2. Consideramos la región de rechazo $I_r(c) = (-1, c]$ y buscamos el máximo c tal que:

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(X \in I_r(c)|H_0) = P(X \leq c|H_0) \leq 0.05$$

De la Figura se obtiene que:

si $c = -12$ entonces $\alpha = 412/12870 = 0.032$.

si $c = -10$ entonces $\alpha = 871/12870 = 0.0646$.

Por lo tanto $c = -12$, es decir la región de rechazo es $I_r = (-\infty, -12]$. Dado que $X_{\text{obs}} = -16 \in I_r$, entonces se rechaza H_0.