Dependencia

Ejercicio 1

La fórmula de la probabilidad total en su versión continua nos da

$$\mathbf{P}(A) = \int_0^1 \mathbf{P}(A|X=x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx = 1/3.$$

Ejercicio 2

1. Como el triángulo T tiene área 1, la densidad conjunta de X e Y es

   $$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in T \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

   Para $x \in [-1,1]$ tenemos

   $$p_Y(y|X=x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}.$$

   La marginal de X es

   $$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)dy = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

   Así que

   $$p_Y(y|X=x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } x \in [-1,0],\ 0 \le y \le 1+x \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0,1],\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

   La probabilidad buscada es

   $$\mathbf{P}(Y \ge 1/2|X=x) = \int_{1/2}^{\infty} p_Y(y|X=x)dy = \begin{cases} \frac{1+x-1/2}{1+x} & \text{si } x \in [-1/2,0] \\ \frac{1-x-1/2}{1-x} & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

2. $\mathbf{P}(Y < 1/2|X=x) = 1 - \mathbf{P}(Y \ge 1/2|X=x)$ (calculada en la parte 1).
3. $$\mathrm{E}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y|X=x)dy = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & \text{si } x \in [-1,0] \\ \frac{1-x}{2} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$
4. Por un lado

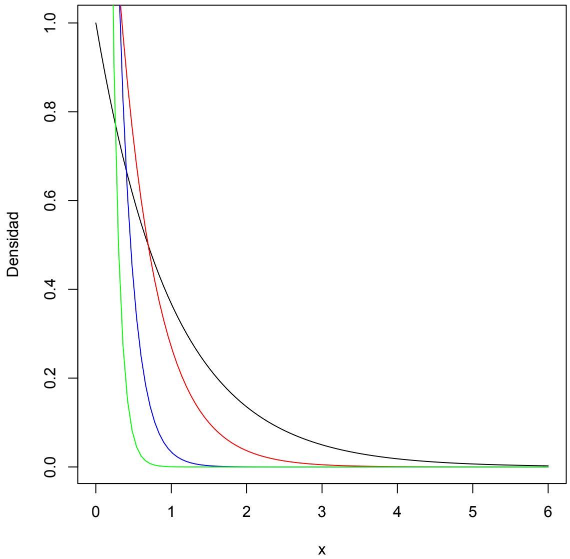
   $$\mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_Y(y|X=x)dy = \begin{cases} \frac{(1+x)^2}{3} & \text{si } x \in [-1,0] \\ \frac{(1-x)^2}{3} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

   De donde

   $$\mathrm{Var}(Y|X=x) = \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) - \mathrm{E}(Y|X=x)^2 = \begin{cases} \frac{(1+x)^2}{12} & \text{si } x \in [-1,0] \\ \frac{(1-x)^2}{12} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

Ejercicio 3

1. Son gráficos de exponenciales que decaen cada vez más rápido a medida que x crece:



2. $\mathbf{P}(Y < 2|X = 2) = 1 - e^{-4}$.

   $\mathrm{E}(Y|X = 2) = 1/2$.

   $\mathrm{E}(Y|X = x) = 1/x$.

   $p_{XY}(x,y) = p_Y(y|X = x)p_X(x) = \frac{x}{10}e^{-xy}$ para $0 \leq x \leq 10$ e $y > 0$.

   $p_Y(y) = \int_0^{10} p_{XY}(x,y)dx = \int_0^{10} \frac{x}{10}e^{-xy}dx = \frac{1-e^{-10y}(10y+1)}{10y^2}$

Ejercicio 4

1. Basta observar que $\int_x^\infty e^{-(y-x)}dy = 1$.
2. Para cualquier x, la probabilidad $\mathbf{P}(Y > x|X = x) = 1$. Luego

$$\mathbf{P}(Y > X) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Y > x|X = x)\, p_X(x)dx = 1$$

3. La densidad conjunta es $p(x,y) = e^{-y}$ para $y > x$ y 0 si no, que no depende de x. Como $p_Y(y)$ no depende de x, la densidad condicional $p_X(x|Y = y)$ tampoco depende de x, y por lo tanto debe ser uniforme. Luego $p_X(x|Y = y) = 1/y$ para $0 \leq x \leq y$.

   Alternativamente se puede calcular la densidad $p_Y(y)$ integrando en e^{-y} de $x = 0$ a $x = y$, lo cual da $p_Y(y) = ye^{-y}$.
4. $\mathbf{P}(Y < 2|X = 1) = \int_1^2 e^{-(y-1)}dy = 1 - e^{-1}$ y $\mathrm{E}(Y|X = 1) = \int_1^\infty ye^{-(y-1)}dy = 2$.
5. $\mathbf{P}(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 \int_0^y e^{-y}dxdy = \int_0^1 ye^{-y}dy = (e-2)/e$ y $\mathbf{P}(Y < 2) = \int_0^2 ye^{-y}dy = 1 - 3/e^2$.

6. La dfa de Y es
$$F(y) = \int_0^y ue^{-u} du = 1 - e^{-y}(y+1)$$
Debemos resolver
$$1 - e^{-c}(c+1) = 0.9$$
que es imposible de resolver analíticamente. Probando una aproximación es $c \approx 3.9$

7. No lo son pues en particular $X < Y$.