Comparación de dos muestras

Ejercicio 1

1. Debemos hacer un test a dos colas
$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_A : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases}$$
El estadístico del test es
$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$
que bajo la hipótesis nula tiene distribución t con $n+m-2$ grados de libertad. La región de rechazo es $|T| \geq c$ en donde c es el valor crítico al nivel α.

   En nuestro caso $T_{\text{obs}} = 0.622$ y $c = 2.1$. Luego no podemos rechazar H_0.

2. Un IdC (exacto) para la diferencia de medias $\mu_X - \mu_Y$ al nivel de confianza $1-\alpha$ es
$$I_\alpha = \left[\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{n+m-2}(\alpha/2) S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right]$$
en donde S^2 denota la varianza agrupada de las dos muestras:
$$S^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}.$$
En nuestro caso los datos son
$$n = m = 10, \quad \overline{X} = 422.2,\ S_X = 172.2, \quad \overline{Y} = 375.7,\ S_Y = 161.9$$
por lo que
$$\overline{X} - \overline{Y} = 46.5, \quad S = 167.2$$
El valor crítico de la t al nivel 0.05 es 2.1, por lo que el intervalo que entonces
$$46.5 \pm (2.1)(167.2)(0.447) = 46.6 \pm 157$$

3. Claramente el 0 está en el intervalo calculado en la parte anterior, lo cual es coherente con el resultado de la parte 1.

4. Dos supuesto importantes: que los datos son normales y que los dos grupos tienen la misma varianza.

Ejercicio 2

Vamos a decidir usando un IdC para la diferencia de medias $\mu_X - \mu_Y$.

En nuestro caso los datos son
$$n = 17,\ m = 14, \quad \overline{X} = 82.9,\ S_X = 13.4, \quad \overline{Y} = 62.5,\ S_Y = 11.5$$
por lo que
$$\overline{X} - \overline{Y} = 20.4, \quad S = 12.6$$

El valor crítico de la t al nivel 0.05 es 2.05, por lo que el intervalo que entonces

$$20.4 \pm (2.05)(12.6)(0.36) = 20.4 \pm 9.3$$

Como el 0 no está en el intervalo, rechazamos la hipótesis de que las medias son iguales.

Ejercicio 3

Un IdC para la diferencia de medias $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ es

$$I_\alpha = \left[\overline{D} \pm t_{n-1}(\alpha/2) \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}} \right]$$

en donde S_D es la varianza muestral de D.

En nuestro caso $n = 8$, $\overline{D} = 868.4$ y $S_D = 1290$. El valor crítico es $t = 3.5$, de donde el intervalo es 868.4 ± 1596.4. Como el 0 está en el intervalo, no hay evidencia para afirmar que una marca es mejor que la otra.

Ejercicio 4

1. Haremos un IdC para la diferencia de medias $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$.

   En nuestro caso $n = 8$, $\overline{D} = -0.2125$ y $S_D = 0.1727$. El valor crítico es $t = 3.499$, de donde el intervalo es -0.2125 ± 0.2136. Como el 0 está en el intervalo, no hay evidencia para afirmar que las pruebas sean diferentes.

   También podemos hacer un TdH:

   $$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_A : \mu_D \neq 0. \end{cases}$$

   El estadístico del test es

   $$T = \frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}}$$

   y la región de rechazo es a dos colas $|T| \geq t$. El valor crítico t vale 3.499. El valor observado es $T_{\text{obs}} = -3.4803$ que cae fuera de la región de rechazo. Luego, no rechazamos H_0.

2. Debemos hacer el IdC usando ahora $\alpha = 0.05$. Ahora el valor crítico es $t = 2.3646$, de donde el intervalo queda -0.2125 ± 0.1444, es decir $[-0.3569, -0.0681]$. Como este intervalo contiene a -0.1, estamos de acuerdo con la afirmación.

   También podemos hacer un TdH como en la parte 1:

   $$\begin{cases} H_0 : \mu_D = -0.1 \\ H_A : \mu_D \neq -0.1 \end{cases}$$

   El estadístico del test es

   $$T = \frac{\overline{D} + 0.1}{S_D/\sqrt{n}}$$

   y la región de rechazo es a dos colas $|T| \geq t$. El valor crítico t vale 2.3646. El valor observado es $T_{\text{obs}} = -1.84$ que cae fuera de la región de rechazo. Luego, no rechazamos H_0.

3. Esta parte se refiere al test de la parte 1. Debemos calcular la potencia del test si $\mu_D = -0.1$. Para poder calcularla debemos suponer que la varianza es conocida, así que supondremos $\sigma_D = S_D$. Esto cambia la distribución del estadístico que ahora es normal en lugar de t.

   Por definición

$$\begin{aligned}
\pi(-0.1) &= \mathbf{P}\left(|T| \geq 3.499 | \mu_D = 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\overline{D}+0.1}{S_D/\sqrt{n}} \leq -3.499 + \frac{0.1}{S_D/\sqrt{n}}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{\overline{D}+0.1}{S_D/\sqrt{n}} \geq 3.499 + \frac{0.1}{S_D/\sqrt{n}}\right) \\
&= \Phi\left(-3.499 + \frac{0.1}{S_D/\sqrt{n}}\right) + 1 - \Phi\left(3.499 + \frac{0.1}{S_D/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

   Para $n = 8$ tenemos $\pi(-0.1) = 0.031$, lo cual es claramente insuficiente.

   Probando con varios valores de n se ve que con $n = 69$ la potencia es 0.905, y con $n = 68$ es 0.899. El menor n es entonces 69.