1

7. Variables aleatorias discretas I

Ej 1: $X \sim Ber(1/2)$ $Y \sim Ber(1/3)$ independientes

$X = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1/2 \\ 0 & \text{con prob. } 1/2 \end{cases}$ $Y = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1/3 \\ 0 & \text{con prob. } 2/3 \end{cases}$

La distribución conjunta es:

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$
1	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$

Valor de X+Y	0	1	2
f.p.p.	$1/3$	$1/2$	$1/6$

Ej 2

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$
$F(x)$	$1/15$	$3/15$	$6/15$	$10/15$	1

1. $Y = X^2$

y	0	1	4
$p(y)$	$3/15$	$6/15$	$6/15$
$F(y)$	$3/15$	$9/15$	1

2

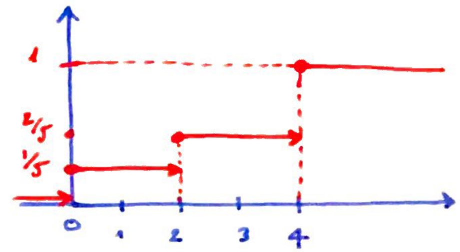
2.

x	$-1/2$	$3/4$	$7/8$	1	1.5	5
$F(x)$	$3/15$	$6/15$	$6/15$	$10/15$	$10/15$	1

3.

y	$-1/2$	$3/4$	$7/8$	1	1.5	5
$F(y)$	0	$3/15$	$3/15$	$9/15$	$9/15$	1

Ej 3 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/5 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 2/5 & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$



x	0	2	4
$p(x)$	$1/5$	$1/5$	$3/5$

Ej 4 (ii) y (iii) no pues no son crecientes.

(i) si lo es, es la f.d.a. de una variable.

Ej 5 $P(X=d) = \log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right)$ $d = 1, 2, \dots, 9$.

1. $R_X = \{1, 2, \dots, 9\}$

x	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0.3	0.18	0.12	0.1	0.08	0.07	0.06
	8	9					
	0.05	0.04					

2. $P(X \text{ par}) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + P(X=8)$
$= 0.4$

3. $P(X \in [3,7]) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$
$= 0.43$

Ej 6 52 cartas, 13 valores, 4 palos

X: nº de tréboles Y = nº de negras

Notar que $X \leq Y$ ya que tréboles $\subset$ negras.

1. No, por ejemplo $P(X=1, Y=0) = 0 \neq P(X=1)P(Y=0)$.

2. $P(Y=13) = ?$

52 tot.
26 N
26 R
$\longrightarrow$ sacamos 13 total de posibilidades es $\binom{52}{13}$

* Elijo las 13 negras: $\binom{26}{13}$

$$P(Y=13) = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}} = 1.6 \times 10^{-5} = p$$

Una forma de estimar la probabilidad de que en algún lugar ocurra $Y=13$ es la siguiente:

Sea N el nº de clubes de Bridge en el mundo. Digamos que en cada club se juega un partido de Bridge por día. La probabilidad de que en ningún día del año ocurra que algún jugador tiene 13 negras es

$$(1-p)^{365N} \approx 1 - 365Np \quad (\text{pues } p \text{ es chico})$$

Entonces la prob. de que sí ocurra es

$$1 - (1-p)^{365N} \approx 365Np$$

Para que $365Np \gtrsim 0.5$ por ejemplo, debemos tener $N \gtrsim \frac{0.5}{365p} = 83.6$.

Si hay al menos 100 clubes en el mundo, el evento no es improbable.

3. $P(X=13) = \frac{1}{\binom{52}{13}} = (6.3 \times 10^{11})^{-1}$

El mismo cálculo que antes da N del orden de 1 millón. Si bien es menos creíble, podría ser.

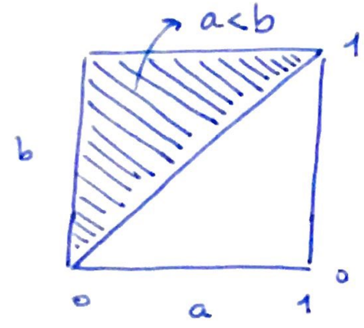
Ej 7 Denotamos $\lfloor x \rfloor$ la parte entera de x.

Sea $X = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. El recorrido es $\{0, 1, 2, \dots\}$

La f.p.p. de X es $p(x) = P(X = x)$ $x = 0, 1, 2, \dots$

Comencemos con $x = 0$.

Notar que $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = 0 \iff \frac{a}{b} \in [0, 1) \iff \frac{a}{b} < 1$

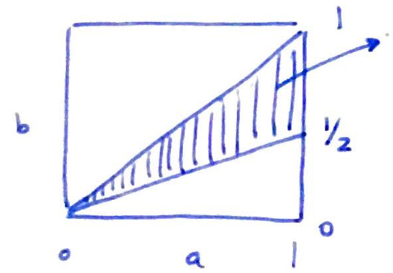


$P(X=0) = 1/2$

Del mismo modo,

$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = 1 \iff \frac{a}{b} \in [1, 2)$

$\iff a \in [6, 2b)$

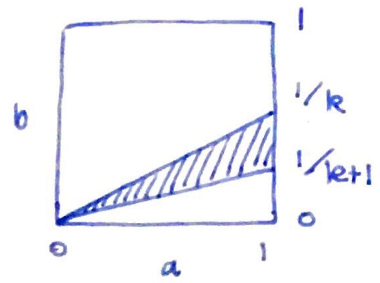


$\frac{a}{b} \in [1, 2)$.

$P(X=1) = \frac{(1 - 1/2) \times 1}{2} = 1/4$

En general, $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = k \iff \frac{a}{b} \in [k, k+1)$

$\iff a \in [kb, (k+1)b)$



$P(X=k) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)}$$

Ej 8 $X \sim Geom(p)$ $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

X = nº de ensayos hasta éxito

Observar que $X > k$ si y solo si los primeros k ensayos son fracaso. Luego $P(X > k) = (1-p)^k$

Entonces: si $X > j+k \Rightarrow X > j$

$$P(X > j+k \mid X > j) = \frac{P(\overbrace{X > j+k, X > j})}{P(X > j)}$$

$$= \frac{P(X > j+k)}{P(X > j)} = \frac{(1-p)^{j+k}}{(1-p)^j} = (1-p)^k = P(X > k).$$

Ej 9

1. X = nº de hijos hasta nena.

si "nena" = "éxito", $\Rightarrow X \sim Geom(1/2)$.

$P(X=k) = 1/2 \, (1 - 1/2)^{k-1} = 1/2^k$.

2. Es igual por la pérdida de memoria.

3. X = nº de hijos hasta nena ó hasta 5.

El recorrido de X es $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

4. $P(X>3) = P(X=4)+P(X=5)$

$= 2/16 = 1/8$.

5. N = nº de nenas.

Entonces $N=0$ ó $N=1$

N	0	1
$p(n)$	$1/16$	$15/16$

$N \sim Ber(15/16)$.

Ej 10 1.5×10^6 habitantes

23×10^3 fueron al ballet

éxito = encontrar una persona que haya ido al ballet

$$p = \frac{23 \times 10^3}{1.5 \times 10^6} = 0.015$$

X = nº de personas entrevistadas

1. $$P(X=11 \mid X>10) = \frac{P(X=11)}{P(X>10)} = \frac{p(1-p)^{10}}{(1-p)^{10}} = p$$

2. $P(X\leq 60) = 1-P(X>60) = 1-(1-p)^{60} = 0.596$

No es tan seguro que vuelva en menos de una hora.

3. X = nº de entrevistas hasta encontrar 3 que hayan ido a la obra.

Notar que $\{X \geq 200\} = \{X > 199\}$ y el director

entrevista a más de 199 si y solo si entre las 199 hay a lo sumo 2 que fueron al ballet.

Hay 3 casos:

Caso 1) No hay ninguno, esto pasa con prob. $(1-p)^{199}$

Caso 2) Hay uno solo, esto pasa con prob.

$$199\, p\,(1-p)^{198}$$

Caso 3) Hay dos, esto pasa con prob.

$$\binom{199}{2} p^2 (1-p)^{197}$$

$$P(X\geq 200) = (1-p)^{199} + 199\,p(1-p)^{198} + \binom{199}{2} p^2 (1-p)^{197}$$

$$= (1-p)^{197}\left[(1-p)^2 + 199\,p(1-p) + \binom{199}{2} p^2\right]$$

$$= 0.42$$

4. $$Y = \begin{cases} 0 & \text{si consulta a 10 y ninguno fue} \\ 1 & \text{si antes de llegar a 10 encuentra 1.} \end{cases}$$

$P(Y=0) = (1-p)^{10} = 0.86$

y	0	1
$p(y)$	0.86	0.14

$Y \sim Ber(0.14)$.

8. Variables discretas II

1

Ej 1 X, Y con recorrido $\{1,2,3,4\}$

f.p.p. conjunta $P(X=i, Y=j) = \frac{i+j}{80}$

1. $P(X=Y) = \sum_{i=1}^{4} P(X=i, Y=i) = \sum_{i=1}^{4} \frac{2i}{80} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{4} i = 1/4$

2. $P(XY=6) = P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2)$

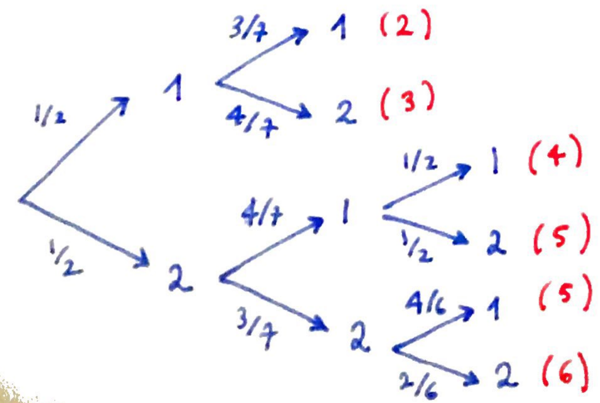
$= \frac{2(2+3)}{80} = 1/8$

3. $P(1 \leq X \leq 2,\ 2 < Y \leq 4)$

$= P(X=1, Y=3) + P(X=1, Y=4)$
$+ P(X=2, Y=3) + P(X=2, Y=4)$

$= \frac{1+3}{80} + \frac{1+4}{80} + \frac{2+3}{80} + \frac{2+4}{80} = \frac{20}{80} = 1/4.$

Ej 2 $\{1♡, 1♠, 1◇, 1♣, 2♡, 2♠, 2◇, 2♣\}$



2

$E(X) = 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) + 5 \cdot P(X=5)$
$+ 6 \cdot P(X=6)$

$= 2 \cdot \frac{3}{14} + 3 \cdot \frac{4}{14} + 4 \cdot \frac{4}{28} + 5 \cdot \left(\frac{4}{28} + \frac{2}{14}\right) + 6 \cdot \frac{1}{14}$

$= \frac{1}{14}\left[6 + 12 + 8 + 20 + 6\right] = \frac{52}{14} = \frac{26}{7} = 3.71$

Ej 3

Y \ X	1	2	3	total
1	1/6	0	1/6	1/3
2	0	1/4	1/12	1/3
3	0	1/12	1/4	1/3
total	1/6	1/3	1/2	1

No son independientes pues $P(X=1, Y=2) = 0 \neq \underset{1/6}{\underset{\shortparallel}{P(X=1)}}\,\underset{1/3}{\underset{\shortparallel}{P(Y=2)}}$

Ej 4 $X, Y \sim Ber(1/2)$ independientes

1.

X \ Y	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

S \ T	-1	0	1	marginal de S
0	0	1/4	0	1/4
1	1/4	0	1/4	1/2
2	0	1/4	0	1/4
marginal de T	1/4	1/2	1/4	1

2. No son independientes.

Por ejemplo:

$$P(S=0, T=-1) = 0 \neq \underbrace{P(S=0)}_{1/4}\underbrace{P(T=-1)}_{1/4}.$$

3. Usando la definición:

Valor de ST	-2	-1	0	1	2
f.p.p.	0	1/4	1/2	1/4	0

S \ T	-1	0	1
0	0 0	1/4 0	0 0
1	1/4 -1	0 0	1/4 1
2	0 -2	1/4 0	0 2

$$E(ST) = -2\cdot 0 - 1\cdot \frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot 0$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

Usando propiedades de la esperanza:

$$E(ST) = E((X+Y)(X-Y)) = E(X^2 - Y^2)$$
$$= E(X^2) - E(Y^2) = E(X) - E(Y) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0$$

ya que $X^2 = X$
$Y^2 = Y$

Ej 5 $X, Y \sim \text{Geom}(p)$ independientes

1. $$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k, Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^k p(1-p)^k$$
$$= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)^2\right)^k = p^2(1-p)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\left((1-p)^2\right)^k$$
$$= p^2(1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2(1-p)^2}{2p-p^2}$$
$$\Rightarrow P(X=Y) = \frac{p(1-p)^2}{2-p}$$

Por ej. si $p = 1/2$ $\quad P(X=Y) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{3/2} = 3/4$

2. $U = \min\{X, Y\} \quad V = X - Y$

Notar que

$\min\{X,Y\} = u$ $\quad \xrightarrow{v \geq 0}$ $\quad Y = u, \; X = v + u$

$X - Y = v$ $\quad \xrightarrow{v < 0}$ $\quad X = u, \; Y = u - v$

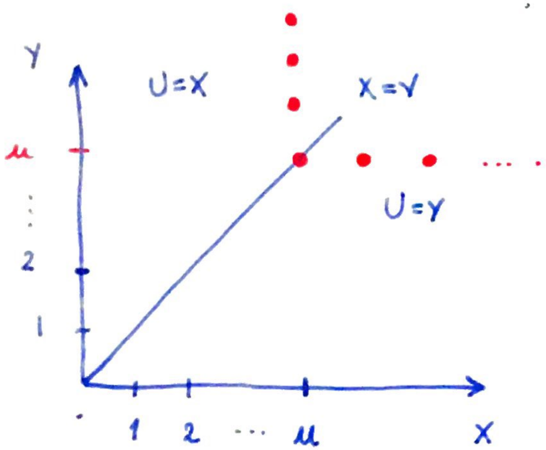
Consideremos el caso $v \geq 0$.

$$P(U=u, V=v) = P(X = v+u, Y = u)$$
$$= P(X = v+u)P(Y=u) = p(1-p)^{v+u-1} p(1-p)^{u-1}$$
$$= p^2 (1-p)^v (1-p)^{2(u-1)}$$

5

Por otro lado,

$$P(U=u) = P(\min\{X,Y\}=u) = P(Y=u, X>u) + P(X=u, Y>u) + P(X=u, Y=u)$$



$$= p(1-p)^{u-1}(1-p)^{u} + p(1-p)^{u-1}(1-p)^{u} + p^2(1-p)^{2u-2}$$

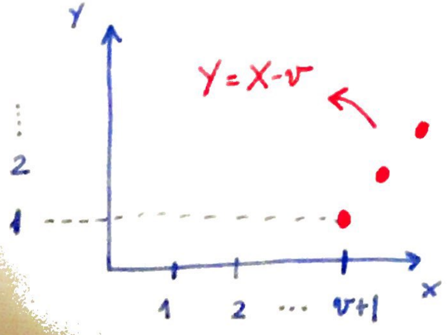
$$= p(1-p)^{2u-1}\left(2+\frac{p}{1-p}\right) = p(1-p)^{2u-1}\left(\frac{2-2p+p}{1-p}\right)$$

$$= p(1-p)^{2u-2}(2-p)$$

Es decir $P(U=u) = p(1-p)^{2(u-1)}(2-p)$

Notar que $U \sim \text{Geom}(1-(1-p)^2)$

$$P(V=v) = P(X-Y=v) = P(Y=X-v)$$



$$= \sum_{k=v+1}^{\infty} P(Y=k-v, X=k)$$

$$= \sum_{k=v+1}^{\infty} p(1-p)^{k-v-1}\, p(1-p)^{k-1}$$

6

$$= \frac{p^2}{(1-p)^{v}} \sum_{k=v+1} \left((1-p)^2\right)^{k-1} = \frac{p^2(1-p)^{2v}}{(1-p)^{v}} \sum_{k=0}^{\infty}\left((1-p)^2\right)^{k-1}$$

$$= p^2(1-p)^{v}\frac{1}{1-(1-p)^2} = p^2(1-p)^{v}\frac{1}{p(2-p)}$$

$$\Rightarrow P(V=v) = p(1-p)^{v}\frac{1}{2-p}.$$

Juntando todo:

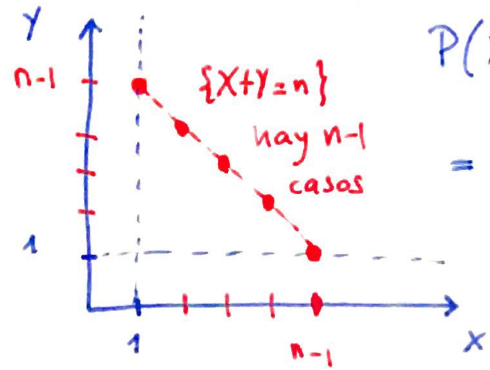
$$P(U=u, V=v) = p^2(1-p)^{v}(1-p)^{2(u-1)}$$

$$= p(1-p)^{v}\frac{1}{2-p}\cdot p(2-p)(1-p)^{2(u-1)}$$

$$= P(U=u)P(V=v).$$

El caso $v<0$ es análogo. $\Rightarrow$ U y V son independientes.

3. El evento $\{X+Y=n\}$ es:



$$P(X=k \mid X+Y=n) = \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$

$$= \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \frac{p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}}{P(X+Y=n)}$$

$$= \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{P(X+Y=n)}$$

Como no depende de k, debe ser igual a $1/_{n-1}$.

Ej 6

1.

$\xrightarrow{p^2}$ CC → situación inicial

$\xrightarrow{p(1-p)}$ CX → éxito

$\xrightarrow{(1-p)p}$ XC → fracaso

$\xrightarrow{(1-p)^2}$ XX → situación inicial

Llamemos q a la prob. de éxito. Del árbol vemos que

$$q = p^2 q + p(1-p) + (1-p)^2 q$$

$$q = (p^2+(1-p)^2)q + p(1-p)$$

$$q = \frac{p(1-p)}{1-(p^2+(1-p)^2)}$$

$$q = \frac{p(1-p)}{1-p^2-1+2p-p^2} = \frac{p(1-p)}{2p-2p^2} = \frac{p(1-p)}{2p(1-p)} = 1/2$$

2. Cada ensayo consiste de dos lanzamientos.

Si sale CX ó XC paramos, si no se repite.

La $P(CX \text{ ó } XC) = 2p(1-p)$

L = nº de lanzamientos = $2N$ = 2 (nº de ensayos)

y $E(N) = \dfrac{1}{2p(1-p)}$. Luego $\boxed{E(L) = \dfrac{1}{p(1-p)}}$.

Ej 7

r	R
b	B
a	A

N total

$r+b+a=N$

→ sacamos n con reposición

X = nº de rojas

Y = nº de blancas

Z = nº de azules

1. El recorrido de X es $\{0,1,\dots,n\}$

Para hacer el cálculo suponemos las bolas distinguibles.

Notar que al ser la extracción con reposición, las bolas extraídas están ordenadas (hay una 1era, 2da, ...)

El total de muestras posibles es N^n

$$P(X=k) = \frac{\binom{n}{k} r^k (N-r)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{r}{N}\right)^k\left(1-\frac{r}{N}\right)^{n-k}$$

Es decir, $X \sim Bin(n, r/N)$.

De modo análogo $Y \sim Bin(n, b/N)$ y $Z \sim Bin(n, a/N)$.

2. $E(X) = n \cdot \frac{r}{N}$, $E(Y) = n \cdot \frac{b}{N}$.

3. Basta observar que $X+Y = n-Z$

por lo que $P(X+Y=k) = P(Z=n-k) = \binom{n}{n-k}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-k}\left(1-\frac{a}{N}\right)^k$

$$E(X+Y) = n - E(Z) = n - n\frac{a}{N} = n\left(1-\frac{a}{N}\right)$$

Notar que $X+Y \sim Bin\left(n, 1-\frac{a}{N}\right)$

4. No lo son: $P(X=n, Y=n) = 0 \neq \underbrace{P(X=n)}_{(r/N)^n} \underset{(b/N)^n}{P(Y=n)}$

Tampoco: $P(Z=n, X+Y=n) = 0$

$$\neq P(Z=n)P(X+Y=n) = (a/N)^n (1-a/N)^n.$$

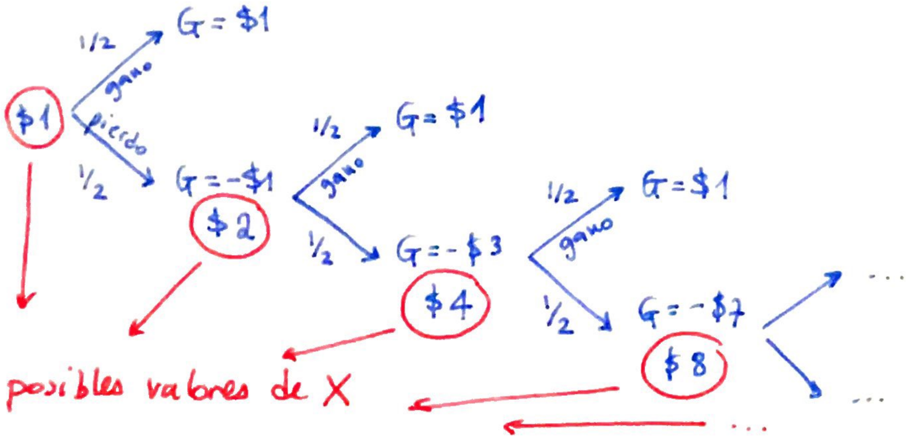
Ej 8 Llamemos $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la persona } i \text{ elije su sombrero} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

$X = X_1 + \cdots + X_{100}$ = número de personas que elijen su sombrero.

Cada $X_i \sim Ber(1/100) \Rightarrow E(X_i) = \frac{1}{100}$.

Entonces $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 100 \cdot \frac{1}{100} = 1$.

Ej 9 G = la ganancia neta



1. X = la cantidad de dinero que yo apuesto en el último juego (el que gano).

X toma valores $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Valor de X	1	2	4	8	16	$\cdots$	2^k
f.p.p. $p(x)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$		$1/2^{k+1}$

2. $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k P(X = 2^k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{E(X) = +\infty}$

3. Debería disponer de ∞ dinero para poder usar esta estrategia.

Ej 10

1.

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2	
0	0	0	$1/5$	0	0	$1/5$
1	0	$1/5$	0	$1/5$	0	$2/5$
4	$1/5$	0	0	0	$1/5$	$2/5$
	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	1

2. $E(X) = 0$, $E(Y) = \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = 2$

3. $P(X=-2, Y=0) = 0 \neq P(X=-2)\,P(Y=0) = \frac{1}{25}$.

4. $E(X)E(Y) = 0$.

Basta ver que $E(XY) = 0$.

$E(XY) = -2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{5} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{5} = 0$