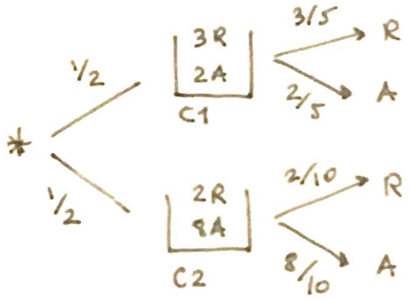
5. El teorema de Bayes

Ej 1

1.

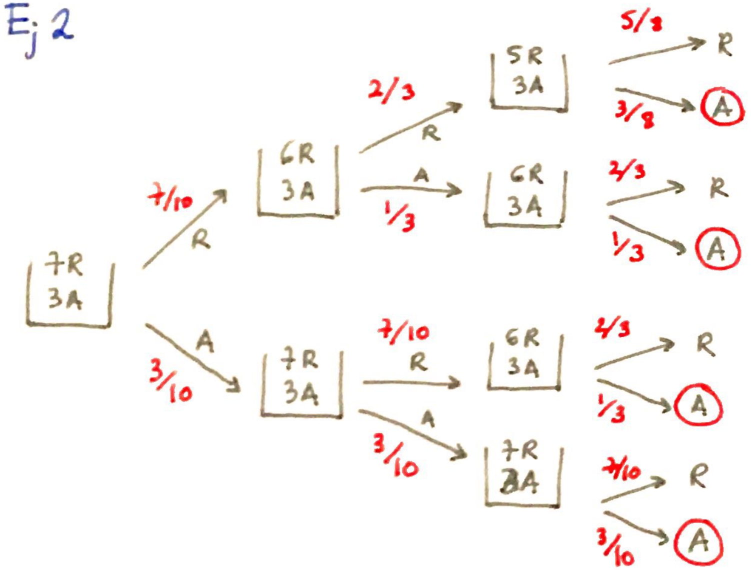


$$P(R) = P(R|C_1)P(C_1) + P(R|C_2)P(C_2)$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

2. $$P(C_1|R) = \frac{P(R|C_1)P(C_1)}{P(R)} = \frac{3/5\cdot 1/2}{2/5} = 3/4.$$

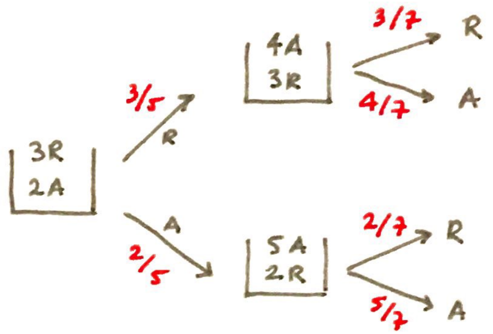
Ej 2



$$P(3^{ra}\text{ azul}) = \frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}$$

$$= \frac{7}{40} + \frac{7}{90} + \frac{7}{100} + \frac{27}{1000} = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7}{4}+\frac{7}{9}+\frac{7}{10}+\frac{27}{100}\right) = 0.35$$

Ej 3



1. $P\left(\text{misma bola}\right) = 1/7$

2. $P(R) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{13}{35}$

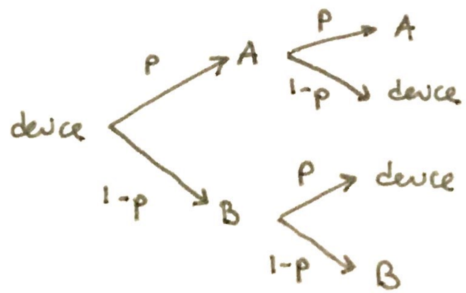
3. $$P\left(\text{misma bola}\,|\,R\right) = \frac{P\left(R\,|\,\text{misma bola}\right)P\left(\text{misma bola}\right)}{P(R)}$$

$$= \frac{P\left(R\,|\,\text{misma bola}\right)\,1/7}{13/35} = \frac{3/5\cdot 1/7}{13/35} = 3/13$$

Ej 4

Llamemos q a la probabilidad de ganar

Hay que hacer dos puntos de ventaja para ganar



$$q = p^2 + 2p(1-p)q$$

$$q = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}$$

Ej 5

1. $P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 1 y } H) = \frac{19}{20}$

$P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 1 y } M) = \frac{200}{2000} = \frac{1}{10}.$

2. $P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 2 y } H) = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}$

$P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 2 y } M) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$

3. $P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 1}) = P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 1 y } H)P(H \mid \text{fármaco 1}) + P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 1 y } M)P(M \mid \text{fármaco 1})$

$$= \frac{19}{20} \cdot \frac{20}{2020} + \frac{200}{2000} \cdot \frac{2000}{2020} = \frac{219}{2020}$$

$P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 2}) = P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 2 y } H)P(H \mid \text{fármaco 2}) + P(\text{éxito} \mid \text{fármaco 2 y } M)P(M \mid \text{fármaco 2})$

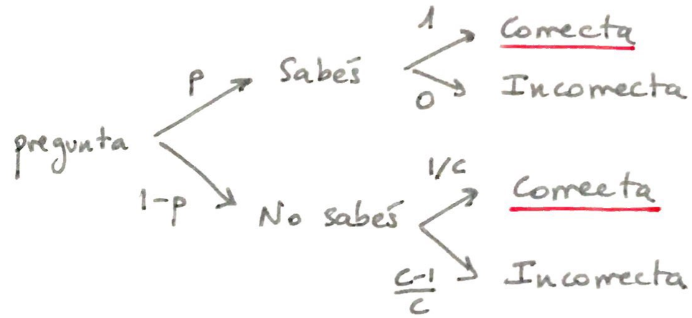
$$= \frac{1000}{2000} \cdot \frac{2000}{2200} + \frac{10}{200} \cdot \frac{200}{2200} = \frac{1010}{2200}$$

El fármaco 2 parece ser mejor globalmente, pero si miramos H y M separadamente el fármaco 1 es mejor en ambos casos.

Ej 6

c opciones para la pregunta

p = prob. de saber la respuesta



$$P(\text{Sabés} \mid \text{correcta}) = \frac{P(\text{correcta} \mid \text{Sabés})P(\text{sabés})}{P(\text{correcta})}$$

$$= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{c}(1-p)} = \frac{p}{p + \frac{1}{c}(1-p)}$$

Ejemplo: $c = 3$, $p = 3/4$ (estudioso)

$$P(\text{sabés} \mid \text{correcta}) = \frac{3/4}{3/4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3}{3 + 1/3} = 9/10.$$

$c = 3$, $p = 1/4$ (no estudioso)

$$P(\text{sabés} \mid \text{correcta}) = \frac{1/4}{1/4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

5

Ej 7

100 taxis → 99 verdes, 1 azul

$P(\text{ver } A \mid A) = 0.99$

$P(\text{ver } A \mid V) = 0.02$

$$P(V \mid \text{ver } V) = \frac{P(\text{ver } V \mid V)\, P(V)}{P(\text{ver } V \mid V) P(V) + P(\text{ver } V \mid A) P(A)}$$

$$= \frac{0.98 \cdot 1/100}{0.98 \cdot \frac{1}{100} + 0.01 \cdot \frac{99}{100}} = 0.497$$

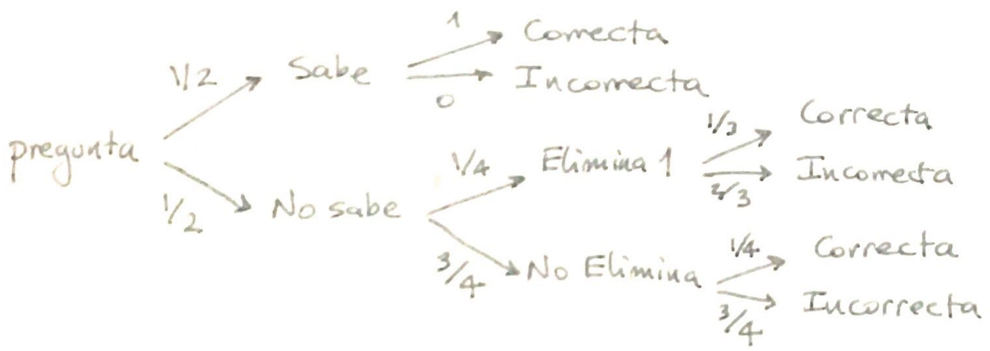
Dada la afirmación del testigo (vió Verde), la prob. de que el taxi sea Verde es menor a 50%.

Ej 8

4 opciones

$1/2$ = prob. saber la respuesta

$1/4$ = prob. eliminar una opción



6

$$P(\text{correcta}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{61}{48}$$

$$P(\text{sabés} \mid \text{correcta}) = \frac{P(\text{correcta} \mid \text{sabés})\, P(\text{sabés})}{P(\text{correcta})}$$

$$= \frac{1 \cdot 1/2}{1/2 \cdot 61/48} = \frac{48}{61} = 0.787$$

Ej 9

40.000 personas celíacas

3.400.000 habitantes

$P(+ \mid \text{celíaca}) = 0.92$

$P(- \mid \text{no celíaca}) = 0.985$

$$\frac{40.000}{3.400.000} = 0.012$$

1. $$P(\text{celíaca} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{celíaca})\, P(\text{celíaca})}{P(+ \mid \text{celíaca}) P(\text{celíaca}) + P(+ \mid \text{no celíaca}) P(\text{no celíaca})}$$

$$= \frac{0.92 \times 0.012}{0.92 \times 0.012 + 0.015 \times 0.988} = 0.427$$

2. $$P(\text{celíaca} \mid -) = \frac{P(- \mid \text{celíaca}) \cdot P(\text{celíaca})}{P(- \mid \text{celíaca}) P(\text{celíaca}) + P(- \mid \text{no celíaca}) P(\text{no celíaca})}$$

$$= \frac{0.08 \times 0.012}{0.08 \times 0.012 + 0.985 \cdot 0.988} \approx 10^{-3} = \frac{1}{1000}.$$

Ej 10

$P(C) = 0.0005$

$P(+|C) = 0.9$

$P(+|NC) = 0.01$

$$P(C|+) = \frac{P(+|C)P(C)}{P(+|C)P(C) + P(+|NC)P(NC)}$$

$$= \frac{0.9 \times 0.0005}{0.9 \times 0.0005 + 0.01 \times 0.9995}$$

$$= 0.043$$

$$P(C|-) = \frac{P(-|C)P(C)}{P(-|C)P(C) + P(-|NC)P(NC)}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.0005}{0.1 \times 0.0005 + 0.99 \times 0.9995}$$

$$= 5 \times 10^{-5}$$

7

6. El teorema de Bernoulli

Ej 1. Ambas secuencias son igualmente probables.

Ej 2. Falso. El teorema de Bernoulli afirma que con probabilidad alta, la diferencia

$$\left| \frac{R_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \text{ es pequeña.}$$

Esto no implica que $\left| R_n - \frac{n}{2} \right|$ sea pequeña. De hecho no lo es.

Ej 3.

1. Para cada n: $F_n(A) \in [0,1] \Rightarrow$ también el límite.

2. Para cada n: $\left.\begin{array}{l} F_n(\Omega) = 1 \\ F_n(\emptyset) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ también el límite.

3. A y B incompatibles:

$\#\{i : A \cup B \text{ ocurre}\} = \#\{i : A \text{ ocurre}\} + \#\{i : B \text{ ocurre}\}$

$\rightarrow F_n(A \cup B) = F_n(A) + F_n(B)$

$\Rightarrow$ también el límite.

4. Si $A \subset B \Rightarrow \#\{i : A \text{ ocurre}\} \leq \#\{i : B \text{ ocurre}\}$

$\Rightarrow F_n(A) \leq F_n(B) \Rightarrow$ también el límite.

5. $\#\{i : A \text{ no ocurre}\} = n - \#\{i : A \text{ ocurre}\}$

$\Rightarrow F_n(A^c) = 1 - F_n(A) \Rightarrow$ también el límite.

Ej 4. 20 tiros prob. de embocar $= 1/2$.

n tiros, $\begin{array}{ll} 0 & \text{si erramos} \\ 1 & \text{si embocamos} \end{array}$

$\Rightarrow$ la prob. de c/secuencia de 0's y 1's es $1/2^n$.

$1 \leq k \leq n$ sea

$A_n(k) =$ "la racha más larga de 1's es de longitud menor o igual a k".

$a_n(k) = |A_n(k)| =$ cardinal de $A_n(k)$.

Descomponemos $A_n(k)$ según el número de 1's antes del primer 0

Estamos interesados en el evento

$A =$ "racha mas larga es de longitud mayor que 5"

$= A_{20}(5)^c$ (complemento de $A_{20}(5)$).

<u>$k = 5$</u>. Buscamos una fórmula para cualquier n.

Si $n \leq 5 \Rightarrow a_n(5) = 2^n$ (todas las secuencias)

Si $n \geq 6$ las secuencias favorables pueden comenzar con: 0, 10, 110, 1110, 11110, 111110.

(pues la racha mas larga es de long. ≤ 5)

Entonces:

$$a_n(5) = a_{n-1}(5) + a_{n-2}(5) + a_{n-3}(5) + a_{n-4}(5) + a_{n-5}(5) + a_{n-6}(5)$$

= suma de los 6 anteriores

Si hacemos una tabla:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_n(5)$	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492	976

suma de los 6 anteriores

n	11	12	13	14	15	16
$a_n(5)$	1936	3840	7617	15.109	29.970	59.448

n	17	18	19	20
$a_n(5)$	117.920	233.904	463.968	920.319

$$P(A) = 1 - P(A_{20}(5)) = 1 - \frac{920.319}{2^{20}} = 1 - 0.87768 = 0.1223\ldots$$

Aproximadamente 12%.

Ej 7.

Del teórico sabemos que

$$(*)\ P(|F_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{2pq}{\varepsilon^2 n}$$

(si $\varepsilon \neq 0$). Como $pq \leq 1/4$ vemos que

$$(*) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2 n}.$$

Ej 8 $n = 1000$, 613 caras

Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{1}{2\varepsilon^2 n} \leq 0.05$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 \geq \frac{1}{2 \times 0.05 \times 1000} = \frac{1}{100} \Rightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\Rightarrow p \in [0.613 \pm 0.1] = [0.513, 0.713].$$

Ej 9 5.579 caras en 10.000 lanzamientos

En ese caso

$|F_n - 1/2| = 0.0579$ y

$$P(|F_n - 1/2| \geq 0.0579) \leq \frac{1}{2(0.0579)^2 10.000} = 0.0149.$$

Esta probabilidad es muy baja.

$\Rightarrow$ la afirmación no es creíble.

Ej 10 p = prob. de cara

$\varepsilon = 0.1$

prob = 0.95

Queremos que $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq 0.05$

Basta pedir $\frac{1}{2\varepsilon^2 n} \leq 0.05$

$\Rightarrow n \geq \frac{1}{2\varepsilon^2 0.05} = \frac{100}{2 \cdot 0.05} = 1.000$

Con 1.000 lanzamientos es suficiente.