1

## 1. Casos favorables sobre casos posibles

**Ej 1.**

Total $\underbrace{\underline{5}\times\underline{4}}_{\text{vocales}}\times\underbrace{\underline{10}\times\underline{9}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underline{6}}_{\text{dígitos}} = (5)_2\,(10)_5$

Empieza en A y termina en 89

$$\underline{A}\ \underline{\ }\,|\,\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{8}\ \underline{9} = 4\times 8\times 7\times 6$$

$4\times 8\times 7\times 6$

$$P(\text{empieza A termina 89}) = \frac{4\times 8\times 7\times 6}{(5)_2\,(10)_5} = \frac{1}{5\times 10\times 9} = \frac{1}{450}$$

**Ej 2.** Total es $\binom{52}{2}$

Hay 4 reinas $\underbrace{Q\heartsuit, Q\diamondsuit, Q\clubsuit, Q\spadesuit}$

elijo 2 : $\binom{4}{2} = 6$

$$P(\text{2 reinas}) = 6\Big/\binom{52}{2} = 4.5\times 10^{-3}$$

**Ej 3.** $\underbrace{\frac{\text{mano 1}}{13} \Big/ \frac{\text{mano 2}}{13} \Big/ \frac{\text{mano 3}}{13} \Big/ \frac{\text{mano 4}}{13}}_{52}$

Total es $52!$

Elegimos qué rey va en cada mano : $4!$ (hay 4 reyes)

Elegimos el lugar del rey dentro de la mano : 13 (hay 13 lugares)

Elegimos dónde poner el resto de las cartas : $48!$

$$P(\text{rey en c/mano}) = \frac{(13)^4\cdot 4!\cdot 48!}{52!} = \frac{(13)^4\, 4\cdot 3\cdot 2}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}$$

$$= 0.1055$$

**Ej 4.** Full house $\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{mismo valor}} / \underbrace{\_\ \_}_{\text{mismo valor}}$

Total $\binom{52}{5}$.

$$P(\text{Full}) = \frac{13\cdot 12\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 1.4\times 10^{-3}$$

**Ej 5.**

$$12\left\{\begin{array}{l}3 \text{ ingenieros}\\ 5 \text{ economistas}\\ 4 \text{ arquitectos}\end{array}\right\} \xrightarrow{?} 4$$

$A = \{\text{al menos 2 arquitectos}\}$

$B_2 = \{\text{exactamente 2 arquitectos}\}$

$B_3 = \{\text{axactamente 3 arquitectos}\}$

$B_4 = \{\text{exactamente 4 arquitectos}\}$

$P(A) = P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$

$$= \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{2} + \binom{4}{3}\cdot\binom{8}{1} + \binom{4}{4}\cdot\binom{8}{0}}{\binom{12}{4}}$$

$$= \frac{201}{495} = 0.406$$

2

Ej 6.

$$\frac{H_1 \; H_2 \; H_3 \; H_4 \; H_5 \; H_6}{M_1 \; M_2 \; M_3 \; M_4 \; M_5 \; M_6} \longleftarrow$$ basta ordenar al azar las mujeres.

Total es $6! = 720$

$$P(H_i \text{ baile con } M_i) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} = 1.4 \times 10^{-3}$$
$i = 1, \dots, 6$

Ej 7. 5 platos rotos, 5 lavaplatos.

Podemos imaginar que los platos son distinguibles, por ejemplo, son de distintos colores.

| Plato | Plato 1 | Plato 2 | Plato 3 | Plato 4 | Plato 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Lavaplatos que lo rompe | ? | ? | ? | ? | ? |

Basta elegir qué lavaplatos, $L_1, L_2, L_3, L_4$ ó $L_5$, rompe cada plato.

5 posibilidades para el primer plato
–– " –– segundo –"–
–– " –– tercero –"–
–– " –– cuarto –"–
–– " –– quinto –"–
total $5^5$

$A = \{L_1 \text{ rompe al menos 4 platos}\}$
$= B_4 \cup B_5$ en donde $B_k = \{L_1 \text{ rompe exactamente } k \text{ platos}\}$



$$P(B_4) = \frac{\binom{5}{4} \cdot 4}{5^5}$$
elijo los 4 platos; elijo qué lavaplatos rompe el otro plato

$$P(B_5) = \frac{\binom{5}{5} \cdot 1}{5^5}$$

$$P(A) = P(B_4) + P(B_5) = \frac{4 \cdot \binom{5}{4} + 1}{5^5} = \frac{21}{3125}$$

La chace de que esto pase casualmente es 0.672%

No es muy creíble.

Ej 8. Total de combinaciones $N = \binom{49}{6}$

$n = 3016$ sorteos.

$A = \{$en al menos 2 sorteos sale la misma combinación$\}$

$A^c = \{$en todos los sorteos sale una combinación distinta$\}$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(N)_n}{N^n}$$

Esta probabilidad se puede aproximar por

$$P(A) \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2N}} = 0.278$$

Hay cerca de 28% de chances de que esto ocurra.

Ej 9. Total de órdenes posibles es $n!$

$$\overbrace{\_\ \_\ \_\ \dots\ \_}^{n \text{ lugares}}$$

$$\_\ \underline{1}\ \_\ \dots\ \underline{2}\ \dots\ \_$$

elijo dos lugares en donde poner el 1, 2 se puede hacer de $\binom{n}{2}$ formas distintas

$$\underline{?}\ \underline{1}\ \underline{?}\ \dots\ \underline{2}\ \dots\ \underline{?}$$

Despues elijo qué poner en los $n-2$ lugares restantes.

$$P(1 \text{ antes del } 2) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n!} = \frac{1}{2}$$

Otra forma: por cada orden en el que el 1 está antes que el 2, intercambiando el 1 y 2 entre ellos obtengo un orden con el 2 antes que el 1. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} P(1 \text{ antes } 2) = P(2 \text{ antes } 1) \\ \text{y además} \\ P(1 \text{ antes } 2) + P(2 \text{ antes } 1) = 1 \end{array}\right\} P(1 \text{ antes } 2) = 1/2.$$



Para (razonando igual)

$$P(1 \text{ antes } 2 \text{ antes } 3) = \frac{\binom{n}{3} \cdot (n-3)!}{n!} = \frac{1}{3!}$$

¿Se te ocurre una forma mas simple?

Caso consecutivos:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{1}\ \underline{2}\ \_\ \dots\ \_ \\ \_\ \underline{1}\ \underline{2}\ \dots\ \_ \\ \quad \ddots \\ \_\ \dots\ \underline{1}\ \underline{2} \end{array}\right\} n-1 \text{ posibilidades para poner } \underline{1}\ \underline{2}.$$

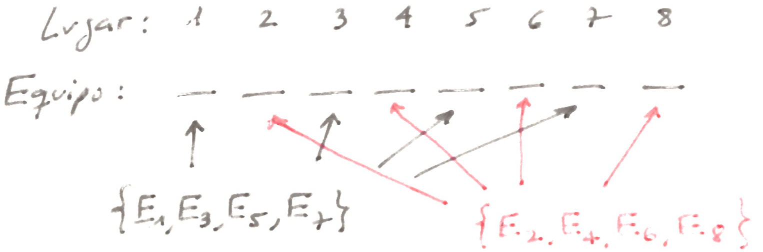
$$P(1 \text{ antes } 2 \text{ y consecutivos}) = \frac{(n-1)\cdot(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \dots\ \_ \\ \quad \ddots \\ \_\ \dots\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3} \end{array}\right\} n-2 \text{ posibilidades}$$

$$P(1 \text{ antes } 2 \text{ antes } 3 \text{ y consecutivos}) = \frac{(n-2)\cdot(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Ej 10. $E_1, \dots, E_8$ equipos

Total de órdenes es $8!$



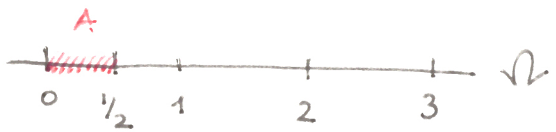

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{equipos impares en lugares impares} \\ \text{equipos pares en lugares pares} \end{array} \right\}$$

$$P(A) = \frac{4!\,4!}{8!} = \frac{1}{\binom{8}{4}} = 0.0143$$

¿Se te ocurre una interpretación de porqué aparecen las combinaciones $\binom{8}{4}$?

## 2. Probabilidades geométricas

Ej 1.



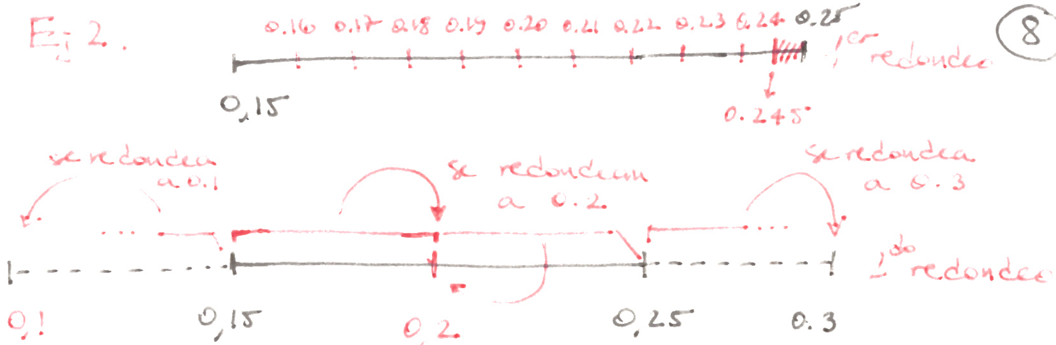

$A = \{ X$ más cerca del $0$ que del $1 \}$

$\text{long}(A) = 1/2 \quad , \quad \text{long}(\Omega) = 3$

$$P(A) = \frac{1/2}{3} = 1/6 .$$



Ej 2.

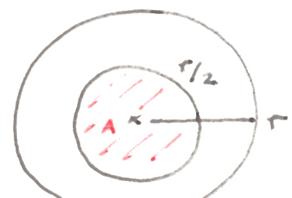



Todos los números entre $0{,}15$ y $0.245$ se redondean a $0.2$. Los números en $[0.245, 0.25]$ se redondean primero a $0.25$ y luego a $0.3$.

$$\Rightarrow P\left(\begin{array}{c}\text{terminar} \\ \text{en } 0.2\end{array}\right) = \frac{\text{long}([0{,}15, 0{,}245))}{\text{long}([0{,}15, 0{,}25])}$$

$$= \frac{0.245 - 0.15}{0.25 - 0.15} = \frac{0.095}{0.1} = 0.95 \ (95\%)$$

Ej 3 Blanco:




$$P(A) = \frac{\pi (r/2)^2}{\pi r^2} = 1/4$$

Ej 4

$x_1 = \text{nº}$ de Ana

$x_2 = \text{nº}$ de Beto

$x_3 = \text{nº}$ de Carlos

$\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \}$ = Bola de radio 1

$$P(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1) = \frac{\text{Vol}\,(\frac{1}{8}\text{Bola})}{\text{Vol}\,(\text{Cubo})} = \frac{4/3\,\pi \cdot 1/8}{1} = \pi/6$$

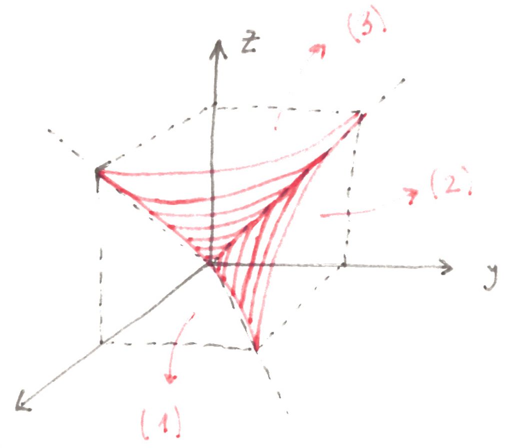
Ej 5 $x$ = nº de Ana

$y$ = nº de Beto

$z$ = nº de Carlos

Hay 3 casos a considerar

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x^2 > y^2 + z^2 \\ (2) & y^2 > x^2 + z^2 \\ (3) & z^2 > x^2 + y^2\end{array}\right\}$$ Cada uno de ellos representa 1/4 de un cono de base circular de radio 1 y altura 1.

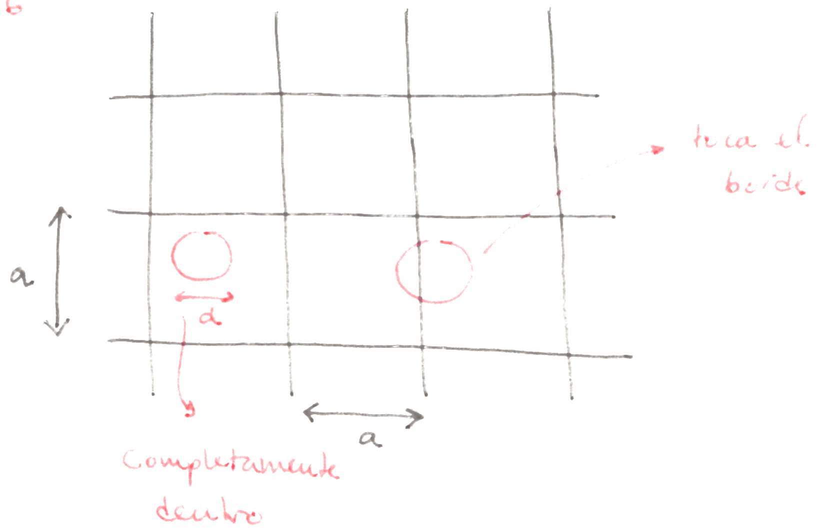



El vol. de un cono es $\frac{\text{Base} \times \text{altura}}{3}$, y como el volumen del cubo es 1, tenemos

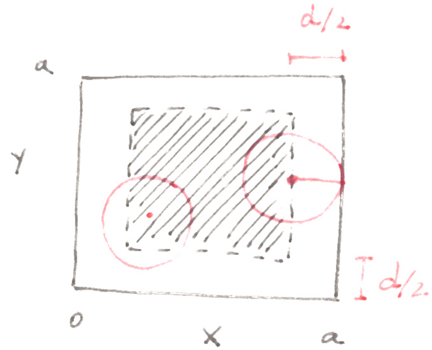
$$P = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{\pi 1^2 \times 1}{3} = \pi/4$$



Ej 6




Sean X e Y las coordenadas del centro de la moneda, medidas desde la esquina inferior del cuadrado en el que cae.




Para que la moneda no toque el borde, su centro debe caer a una distancia mayor a d/2 del mismo. (zona rayada).

$$P = \frac{(a-d)^2}{a^2} = \left(1 - d/a\right)^2$$

Ej 7 Llamemos $X$ al primer punto e $Y$ al segundo. (11)

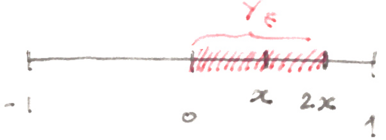
Sea $A := \{$ uno de ellos está más cerca del origen que del otro $\}$

Es más fácil calcular el complemento

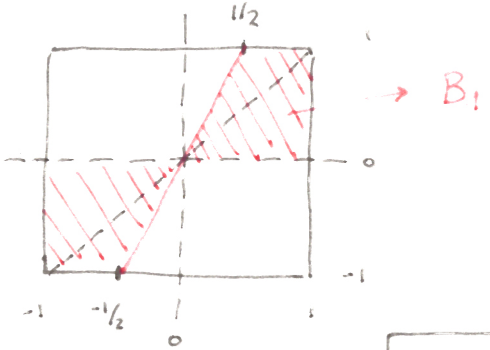
$$A^c = \underbrace{\{ X \text{ está más cerca de } Y \text{ que de } 0 \}}_{B_1} \cap \underbrace{\{ Y \text{ está más cerca de } X \text{ que de } 0 \}}_{B_2}$$

$= A_1 \cap A_2$.

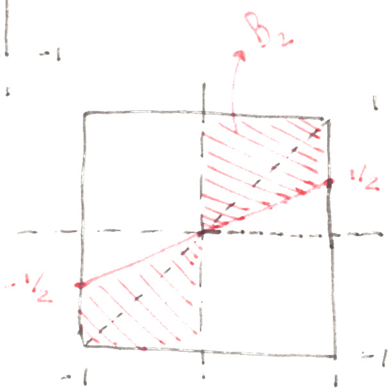
Si $Y = x$ con $x \in [-1, 1]$, el evento $B_1$ ocurre si



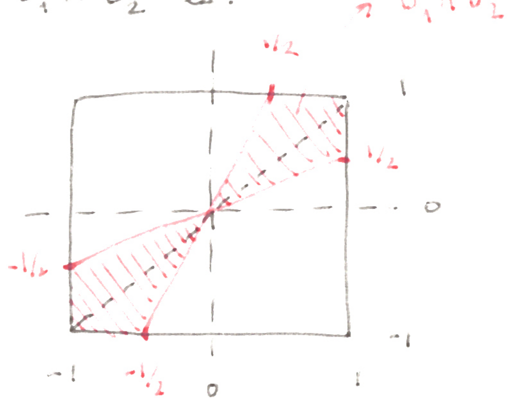

, lo cual se ve mejor en 2D:




Por simetría se ve que $B_2$ es




Por lo que $B_1 \cap B_2$ es: (12)



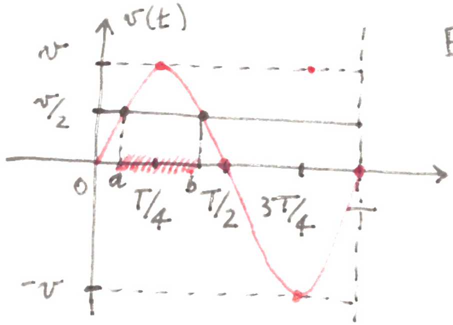

De aquí se ve que $P(A^c) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

De donde $P(A) = 3/4$.

Ej 8 La velocidad del bloque se puede suponer

$$v(t) = v \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Basta ver lo que ocurre en un ciclo: $[0, T]$.




El evento que nos interesa es el intervalo $[a, b]$ en donde

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Como $\sin(x) \geq 1/2$ (con $x$ en $[0, 2\pi]$) si $x \in [\pi/6, 5\pi/6]$

Vemos que $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \geq 1/2$ si $\frac{2\pi t}{T} \in [\pi/6, 5\pi/6]$ (13)

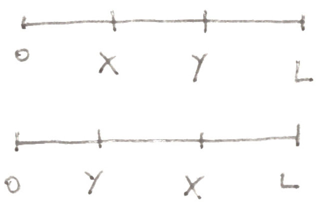
ó lo que es lo mismo si:

$$t \in \left[\frac{T}{12}, \frac{5T}{12}\right]$$

$$P\left(\text{velocidad} \geq v/2\right) = \frac{5T/12 - T/12}{T} = \frac{4}{12} = 1/3 .$$

Ej 9 Llamemos X al primer punto
Y al segundo.

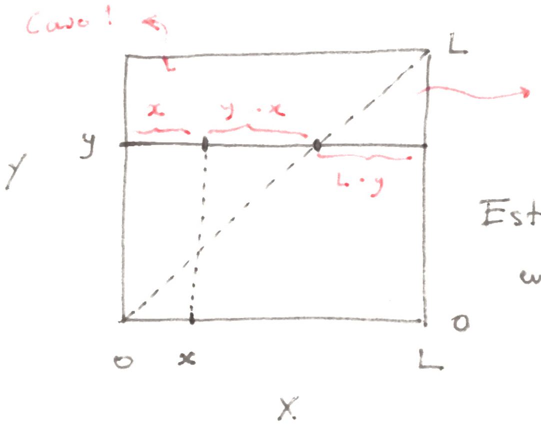
Hay dos casos:




(Caso 1)

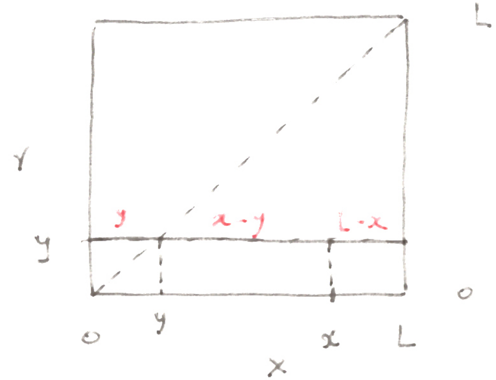
(Caso 2)

Es un problema 2D:




Estas son las longitudes en el caso 1

(14)



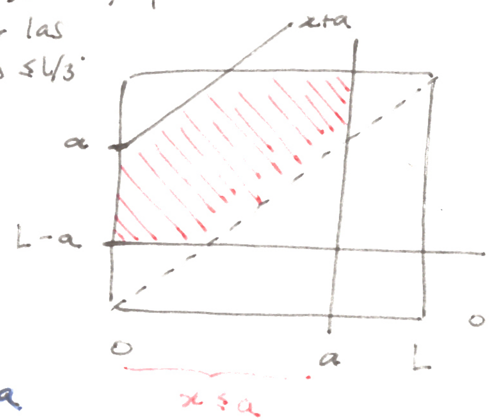

Estas son las longitudes en el caso 2.

En el caso 1: $x \leq a$, $y - x \leq a$, $L - y \leq a$

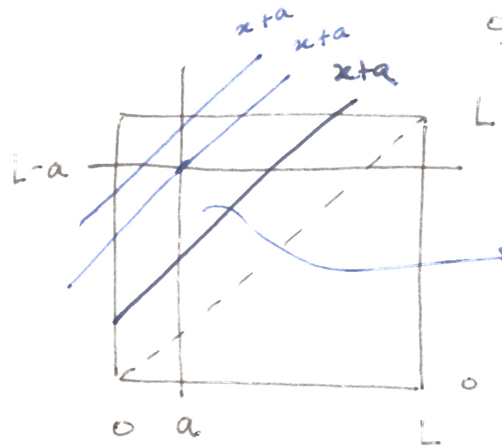
En el caso 2: $y \leq a$, $x - y \leq a$, $L - x \leq a$

Notar que $a \in [L/3, L]$, pues si $a > L$ la probabilidad es 1, y no pueden ser las tres longitudes $\leq L/3$.

En el caso 1:




$(a > L/3)$




¿de qué lado corta? El evento es vacío si corta por debajo de $x = a$, $y = L - a$

El caso límite es

$$y = L - a = x + a = a + a$$

es decir, cuando $a = L/3$.

El caso 2 es simétrico. Es mas fácil calcular la probabilidad del complemento:

$$P(\text{max. long.} > a) = \frac{\text{area de los 6 triangulos}}{L^2}$$

$$= \frac{2 \times \left( (L-a)^2/2 + (L-a)^2/2 + (L-a)^2/2 \right)}{L^2} = \frac{3(L-a)^2}{L^2}$$

(para $a \geq L/2$)

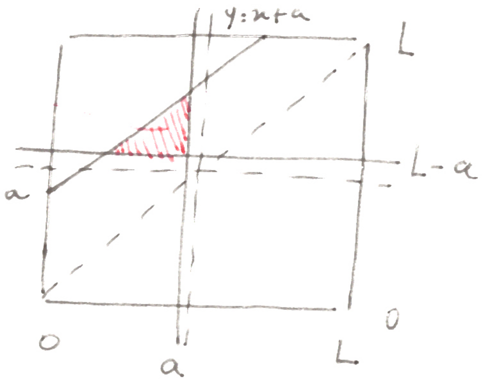
Luego:

$$P(\text{max. long.} \leq a) = 1 - \frac{3(L-a)^2}{L^2} = 1 - 3\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2$$

(para $a \geq L/2$)

Si $\frac{L}{3} \leq a < L/2$ la figura es:

área es $\frac{(3a-L)^2}{2}$




En este caso $P(\text{max. long.} \leq a) = \left(\frac{3a}{L} - 1\right)^2$

$$\boxed{P(\text{max. log.} \leq a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < L/3 \\ (3a/L - 1)^2 & \text{si } L/3 \leq a \leq L/2 \\ 1 - 3(1 - a/L)^2 & \text{si } L/2 < a \leq L \\ 1 & \text{si } a > L \end{cases}}$$



Ej 4.

En el caso en que las divisiones son iguales, la probabilidad de que las dos marcas estén en el mismo pedazo es $1/n$.

En el segundo caso:

hay $n+1$ marcas en total = 2 primeras + $n-1$ de las divisiones.

Hay $\binom{n+1}{2}$ maneras distintas de elegir dos marcas entre las $n+1$. De interés son aquellas en las que las 2 marcas son consecutivas.

Si las marcas son numeradas del 1 al $n+1$, hay $n$ casos favorables.

Luego: $P = \frac{n}{\binom{n+1}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}$.

Notar que en el segundo caso la probabilidad es mayor.