Universidad de la República **30 de junio de 2023**

Facultad de Ingeniería-IMERL

SEGUNDO PARCIAL: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA (SOLUCIÓN)

Ejercicio 1

Sabemos que cuando $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, se cumple que $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$ y $\mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2$.
Aplicando la ley fuerte de los grandes números, tenemos que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{c.s.}{\to} \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 2/\lambda^2. \text{ Entonces } \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \overset{c.s.}{\to} \lambda^2/2.$$

Ejercicio 2

Definimos $X_i = 1$ si acierta la vez $i-$ésima y 0 si no acierta, tenemos que $X_1, X_2, ..., X_n$ es MAS de $X \sim \text{Ber}(p)$ y se plantean las hipótesis $H_0 : p \geq 0.83$ versus $H_1 : p < 0.83$.

La región crítica aproximada en estos casos es $RC = \left\{ \overline{X}_n \geq 0.83 - \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} z_\alpha \right\}$, en este caso tenemos que $p_0 = 0.83$, $n = 900$, $z_\alpha = z_{0.01} = 2.3263$ por lo que tenemos $RC = \left\{ \overline{X}_n \geq 0.80087 \right\}$.

Como en estos casos $\overline{X}_n =$ total de aciertos$/n$ se tiene que rechazaremos H_0 si el total de aciertos es $\geq 0.80087n = 720,783$ por lo que la cantidad mínima de aciertos requerida para rechazar H_0 es 721.

Ejercicio 3

$X_i =$peso en gramos de la moneda i verifica que $\mu = 4.81$ y $\sigma^2 = 0.04$. El peso total (en gramos) de las 1000 monedas es $T = X_1 + X_2 + ... + X_{1000}$ que por el TCL tendrá una distribución aproximada $N(n\mu, n\sigma^2) = N(4810, 40)$. Entonces

$$P(T > 4800) \cong 1 - \phi\left(\frac{4800 - 4810}{\sqrt{40}}\right) = 0.943.$$

Ejercicio 4

Aplicamos la fórmula para el intervalo de confianza para μ con varianza desconocida en poblaciones normales, $\overline{X}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$ en este caso dado que $\overline{X}_n = 124,61$, $S_n = 1.916$, $t_{\alpha/2}(n-1) =$

$t_{0.1}(7) = 1.415$ nos queda el siguiente intervalo de confianza

$$[123.65, 125.56].$$

Ejercicio 5

Planteamos el logaritmo de la función de verosimilitud

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \log f_X(x_i, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{\alpha}{(1-x_i)^2} e^{\frac{-\alpha x_i}{1-x_i}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\log(\alpha) - \frac{\alpha x_i}{1-x_i} - \log(1-x_i)^2\right] =$$

$$n\log(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i} - \sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i)^2.$$

$$h'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i} = 0 \text{ si y sólo si } \alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}}.$$

El signo de la derivada nos permite asegurar que en ese punto se obtiene el máximo por lo que el estimador máximo verosímil de α es

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}}.$$

Ejercicio 6

Planteamos el sistema $\begin{array}{c} \mathbb{E}(X) = \overline{x} \\ \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{n}\sum x_i^2 \end{array}$ que equivale a $\left\{\begin{array}{c} -3\lambda + 2\theta + 1 = 1/11 \\ -\lambda + \theta + 1 = 7/11 \end{array}\right.$.

Resolviendo el sistema nos queda $\widehat{\theta} = \frac{-2}{11}, \widehat{\lambda} = \frac{2}{11}$.

Ejercicio 7

Tanto para el cálculo de α como el del p-valor tomamos $H_0 : \mu = 5$ (porque es donde se obtiene el supremo de la probabilidad de RC bajo H_0 cierto). En ese caso tenemos que $\overline{X}_n$ distribuye aproximadamente $N(\mu, \sigma^2/n) = N(5, 0.0128)$. Entonces

$$\alpha = \sup P_{H_0}(RC) = P_{H_0}\left(\overline{X}_n \geq 5.21\right) \cong 1 - \phi\left(\frac{5.21-5}{\sqrt{0.128}}\right) = 0.0317.$$

$$p_0 = P_{H_0}\left(\overline{X}_n \geq 5.24\right) \cong 1 - \phi\left(\frac{5.24-5}{\sqrt{0.128}}\right) = 0.01694.$$

Ejercicio 8

La desigualdad de Chebychev nos dice que $P(|X - \mathbb{E}(X)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$. En este caso tenemos que

$$P(720 \leq X \leq 880) = P(|X - \mathbb{E}(X)| \leq 80) \geq 1 - \frac{40^2}{80^2} = \frac{3}{4}.$$