Respuestas correctas

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	9.1	9.2	10.1	10.2
Versión 1	D	E	D	F	A	B	E	C	B	D	B	E

Ejercicio	1	2	3.1	3.2	4	5.1	5.2	6	7	8	9	10
Versión 2	A	D	F	B	A	C	D	F	D	E	C	B

Soluciones

Nota: El orden de los ejercicios corresponde a la versión 1.

Ejercicio 1

De las definiciones de cuantiles vemos que los resúmenes numéricos de los tres conjuntos de datos son:

(D_1):

min	q_i	m	q_s	max
39	45	49	55	59

(D_2):

min	q_i	m	q_s	max
39	45	50	53	59

(D_3):

min	q_i	m	q_s	max
39	45	49	55	59

Por lo que solamente (D_1) y (D_3) se corresponden al resumen numérico del texto.

Ejercicio 2

Denotemos por $x_1, \ldots, x_{21}$ las alturas de las 21 personas en la habitación y x_{22} la altura de la nueva persona. Entonces

$$\bar{x}_{22} = \frac{x_1 + \cdots + x_{21} + x_{22}}{22} = \frac{21\bar{x}_{21} + x_{22}}{22}$$

Luego, para que

$$2 = \bar{x}_{22} - \bar{x}_{21} = \frac{x_{22} - \bar{x}_{21}}{22} = \frac{x_{22} - 170}{22}$$

se debe cumplir que $x_{22} = 22(2) + 170 = 214$.

Ejercicio 3

Debemos calcular un p-valor a dos colas ya que no se dispone de conocimientos previos sobre la relación entre el crecimiento y la dosis.

La hipótesis nula es que la dosis no afecta la taza de crecimiento, por lo tanto, bajo H_0 las $\binom{4}{2} = 6$ asignaciones posibles son igualmente probables:

Asignación	Dosis	Alta	Suma X
1	2.5	1.1	3.6
2	2.5	1.4	3.9
3	2.5	0.8	3.3
4	1.1	1.4	2.5
5	1.1	0.8	1.9
6	1.4	0.8	2.2

El valor observado es $X_{\text{obs}} = 3.6$, por lo que el p-valor es

$$\text{pval}\left(X_{\text{obs}}\right) = 2\,\text{mín}\{P\left(X \geq 3.6\right), P\left(X \leq 3.6\right)\} = 2\,\text{mín}\{2/6, 5/6\} = 2/3.$$

Ejercicio 4

Denotemos $X_1, \ldots, X_n$ un muestreo aleatorio de X con distribución de Poisson de media μ. La fpp de X es por definición

$$p(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

La función de verosimilitud es entonces

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{X_i} e^{-\mu}}{(X_i)!} = \mu^{\sum_{i=1}^{n} X_i} e^{-n\mu}$$

Tomando logaritmo, derivando e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\mu} - n = 0$$

por lo que el estimador de máxima verosimilitud es $\hat{\mu} = \bar{X}$.

Entonces, la estimación por máxima verosimilitud es en este caso igual a

$$\hat{\mu} = \frac{0(5)+1(7)+2(12)+3(9)+4(5)+5(1)+6(1)}{40} = 2.225$$

Ejercicio 5

Para calcular el sesgo debemos primero calcular la densidad de $\hat{\theta}$. Para esto, sea $t \in [0, \theta]$, entonces

$$P\left(\hat{\theta} \leq t\right) = P\left(X_1 \leq t, X_2 \leq t\right) = (t/\theta)^2.$$

Derivando (respecto de t) obtenemos la densidad $p(t) = 2t/\theta^2$ para $t \in [0, \theta]$.

La esperanza de $\hat{\theta}$ es entonces

$$\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right) = \int_0^{\theta} 2t^2/\theta^2 dt = (2/3)\theta$$

Luego el sesgo de $\hat{\theta}$ es $(-1/3)\theta$.

Ejercicio 6

Dado que la hipótesis alternativa es a una cola, el p-valor es también a una cola.

En este caso, debemos calcular $\mathrm{P}_{H_0}(X \geq 4)$. Bajo H_0 el estadístico X igual al número de caras tiene distribución binomial de parámetros $n = 5$ y $\theta = 0.5$. Entonces $\mathrm{P}_{H_0}(X \geq 4) = 0.156 + 0.31 = 0.187$.

Ejercicio 7

Debemos hacer un intervalo de confianza para muestras apareadas. Para eso calculamos las diferencias:

Individuo	1	2	3	4
1era prueba	7	3	15	10
2da prueba	18	22	22	29
Diferencia	11	19	7	19

De aquí vemos que el promedio es $\bar{D} = 14$ y $S_D = 6$. Tenemos $n = 4$, o sea 3 grados de libertad, y $\alpha = 0.05$, por lo que el cuantil lo sacamos de la tabla y es $t = 3.18$. Luego el intervalo queda

$$\bar{D} \pm tS_D/\sqrt{n} = 14 \pm (3.18)(6)/\sqrt{4} = 14 \pm 9.54$$

Ejercicio 8

Calculamos primero el valor del estadístico de Pearson Q_P:

Categoria	M	N	V	A
Observada	42	64	53	65
Esperada	56	56	56	56

Luego

$$(Q_P)_{\text{obs}} = \frac{(56-42)^2}{56} + \frac{(56-64)^2}{56} + \frac{(56-53)^2}{56} + \frac{(56-65)^2}{56} = 6.25$$

El valor crítico se obtiene de la tabla para $k - 1 = 3$ grados de libertad y $\alpha = 0.05$ es 7.81. Como $(Q_P)_{\text{obs}} < 7.81$ no rechazamos H_0.

Ejercicio 9

1. El test en consideración es $\begin{cases} H_0 : \theta \leq 0.5 \\ H_A : \theta > 0.5 \end{cases}$.

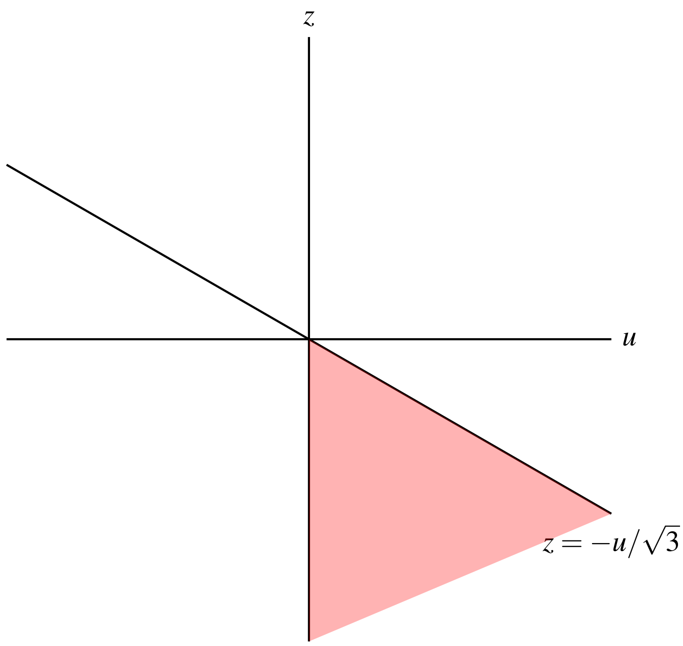
2. Debemos calcular la potencia asumiendo que $\theta = 0.55$. La región de rechazo es $\{X \geq 480\}$ en donde X es la cantidad de votantes a favor de la ley en la muestra de $n = 900$. La variable X es la suma de 900 variables Bernoulli de parámetro $\theta = 0.55$. Debemos calcular $P(X \geq 480|\theta = 0.55)$. Por el TCL podemos aproximar esta probabilidad por

$$\begin{aligned} P(X \geq 480|\theta = 0.55) &= P\left(\frac{X - 0.55(900)}{\sqrt{900(0.55)(0.45)}} \geq \frac{480 - 0.55(900)}{\sqrt{900(0.55)(0.45)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X - 495}{14.92} \geq \frac{-15}{14.92}\right) = \Phi(1.005) = 0.8413 \end{aligned}$$

Ejercicio 10

1. Llamemos X el peso al inicio e Y el peso al final. La recta de regresión tiene ecuación
$$y = \frac{r\sigma_Y}{\sigma_X}x - \frac{r\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X + \mu_Y = \beta x + \alpha$$
En nuestro caso
$$\beta = \frac{r\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{(0.5)16}{9} = 0.28$$
y $\alpha = -(0.28)(105) + 75 = 45.6$. Luego, nuestro pronóstico es
$$y = (0.28)(96) + 45.6 = 72.48$$

2. Consideremos las variables estandarizadas
$$U = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad V = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$
Entonces U y V tienen distribución normal bi-variada estándar de correlación $\rho = 1/2$. Esto quiere decir que existe Z, normal estándar, independiente de U tal que
$$V = \rho U + \sqrt{1-\rho^2}Z.$$
Queremos calcular la probabilidad condicional
$$P(Y < \mu_Y | X > \mu_X) = P(V < 0 | U > 0) = \frac{P(V < 0, U > 0)}{P(U > 0)} = 2P(V < 0, U > 0).$$
El lado derecho se puede escribir como
$$P\left(Z < -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}U, U > 0\right) = P\left(Z < -\frac{1}{\sqrt{3}}U, U > 0\right)$$
Este evento corresponde al sector indicado en rojo en la siguiente figura:



Como $\operatorname{atan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, vemos que el ángulo que sustenta dicho sector es

$$\pi/2 - \pi/6 = \pi/3.$$

Luego, por la simetría rotacional, la probabilidad de dicho sector es $(\pi/3)/(2\pi) = 1/6$.

Finalmente, la probabilidad condicional buscada es $2(1/6) = 1/3$.
