Respuestas correctas

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Versión 1	X	F	A	A	C	D	B	C	B	B	C	E
Versión 2	X	E	F	B	A	B	F	C	A	E	F	A

Soluciones

Ejercicio 1

Ordenamos los datos de menor a mayor:

Dato	0	5	11	13	14	15	16	18	19	20	22	34
Profundidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Entonces

$$m = 15, \quad q_i = 11, \quad q_s = 19, \quad RIC = q_s - q_i = 8$$

y calculamos

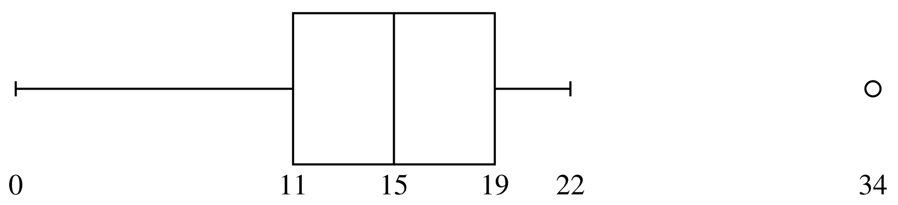
$$L_i = q_i - 1.5 \times RIC = 11 - 1.5 \times 8 = -1, \quad L_s = q_s + 1.5 \times RIC = 19 + 1.5 \times 8 = 31.$$

Los extremos de los bigotes son entonces

$$\min_{x_i \geq -1} \{x_i\} = 0, \quad \max_{x_i \leq 31} \{x_i\} = 22$$

y tenemos un dato atípico 34.

El diagrama de caja queda



Ejercicio 2

Denotemos por $x_1, \ldots, x_n$ los salarios iniciales en la empresa. Entonces

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1500, \quad S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = 400.$$

Los salarios actuales son $y_i = 1.2(x_i + 100)$. Entonces, el salario medio actual es

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1.2(x_i + 100) = 1.2(\bar{x} + 100) = 1920.$$

El desvío estándar actual es

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (1.2)^2 (x_i - \bar{x})^2} = (1.2)(400) = 480.$$

Ejercicio 3

Debemos calcular un p-valor a dos colas ya que no se dispone de conocimientos previos sobre la relación entre los síntomas y la dosis.

La hipótesis nula es que la dosis no afecta la cantidad de días sin síntomas, por lo que bajo H_0 las $\binom{4}{2} = 6$ asignaciones posibles son igualmente probables:

Asignación	Dosis Alta		Suma X
1	11	7	18
2	11	6	17
3	11	8	19
4	7	6	13
5	7	8	15
6	6	8	14

El valor observado es $X_{\text{obs}} = 18$, por lo que el p-valor es

$$\text{pval}\,(X_{\text{obs}}) = 2\,\text{mín}\{P\,(X \geq 18)\,, P\,(X \leq 18)\} = 2\,\text{mín}\{2/6, 5/6\} = 2/3.$$

Ejercicio 4

La función de verosimilitud es

$$L(\theta) = \left(\frac{\theta}{4}\right)^3 \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1-\theta}{3}\right)^2 = (\text{cte})\theta^6(1-\theta)^4$$

Al tomar logaritmos obtenemos

$$\ell(\theta) = (\text{cte}) + 6\ln\theta + 4\ln(1-\theta)$$

Derivando e igualando a cero

$$\ell'(\theta) = \frac{6}{\theta} - \frac{4}{1-\theta} = 0$$

que tiene como solución $\hat{\theta} = 6/10 = 3/5$.

Ejercicio 5

Llamemos $s = \mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right) - \theta$ al sesgo de $\hat{\theta}$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right)$ a su varianza. De los datos sabemos que

$$s^2 + \sigma^2 = 8.$$

Además

$$P\left(\hat{\theta} \leq \theta\right) = P\left(\frac{\hat{\theta} - (s+\theta)}{\sigma} \leq -\frac{s}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{s}{\sigma}\right) = 0.8413$$

De la tabla sacamos que $-s/\sigma = 1$, de donde $s = -\sigma$. En particular s es negativo ya que σ es positivo.

De la ecuación anterior tenemos $2s^2 = 8$, de donde $s^2 = 4$, es decir $s = -2$.

Ejercicio 6

Primero calculamos $c = 8$. La potencia del test es la probabilidad de rechazar H_0 dado que H_0 es falsa. En este caso, esta probabilidad es

$$\begin{aligned}\pi &= P\left(\text{rechazar } H_0 | \theta = 0.7\right) = P\left(X \geq 8 | \theta = 0.7\right) \\ &= 0.231 + 0.240 + 0.168 + 0.071 + 0.014 = 0.724\end{aligned}$$

Ejercicio 7

La probabilidad de error de tipo es por definición la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es cierta. Suponiendo H_0 cierta, el promedio $\overline{X}$ tiene distribución normal de media 150 y desvío $5/\sqrt{5} = 1$. Luego

$$P\left(|\overline{X} - 150| \geq 2 | \mu = 150\right) = 2\left(1 - \Phi(2)\right) = 2(1 - 0.9772) = 0.0456$$

Ejercicio 8

El estadístico para este test es

$$Q_L = 2\sum_{i,j} n_{ij} \ln\left(\frac{n_{ij}n}{n_{i.}n_{.j}}\right)$$

Para calcularlo lo mejor es hacer una tabla como la siguiente:

Observada			Total
	37	53	90
	63	47	110
Total	100	100	200
Esperada			
	45	45	90
	55	55	110
Total	100	100	200
Cálculos			
	-7.24	8.67	
	8.56	-7.39	
$(Q_L)_{\text{obs}}$	5.20		

Como hay $r = 2$ filas y $c = 2$ columnas, los grados de libertad son $(2-1)(2-1) = 1$. De la tabla de la χ^2 vemos que el p-valor está entre 0.020 y 0.025.

Ejercicio 9

El estadístico del test es

$$Q_L = 2\sum_i n_i \left[\ln\left(\frac{n_i}{n}\right) - \ln p_i\right] = 2\sum_i n_i \ln\left(\frac{n_i}{np_i}\right).$$

Para calcularlo lo mejor es hacer una tabla como la siguiente:

	1er Cr	2do Cr	3er Cr	Total (n)
n_i	81	63	81	225
np_i	75	75	75	225
$n_i \ln(n_i/np_i)$	6.23	-10.98	6.23	
$(Q_L)_{\text{obs}}$	2.97			

Tenemos $k = 3$ grupos, por lo que los grados de libertad son $k-1 = 2$. De la tabla vemos que el valor crítico para $\alpha = 0.01$ es 9.21, por lo que

no rechazamos H_0 ya que $(Q_L)_{\text{obs}} = 2.97 < 9.21$.

Ejercicio 10

Tenemos $n = 4$ datos normales, 95, 103, 91, 103, cuyo promedio es $\overline{X} = 98$. El desvío estándar muestral es

$$S = \sqrt{\frac{(-3)^2 + 5^2 + (-7)^2 + 5^2}{3}} = \sqrt{36} = 6.$$

Para $\alpha = 0.05$ y $n - 1 = 3$ el valor de t es 3.18.

El IdC queda entonces $98 \pm (3.18)6/\sqrt{4} = 98 \pm 9.54$.

Ejercicio 11

La forma rápida de resolver el ejercicio es notar que al ser uniforme la distribución conjunta, la esperanza condicional está dada por el segmento formado por los puntos medios de los lados superior e inferior del paralelogramo. Estos lados son $x/2$ y $1 + x/2$, por lo que

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = x/2 + 1/2.$$

Alternativamente podemos calcular las densidades condicionales:

Notar que el paralelogramo tiene área 2. Luego, la densidad conjunta de X e Y es

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2,\ x/2 \le y \le 1 + x/2; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

La densidad marginal de X es entonces

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_{x/2}^{1+x/2} \frac{1}{2}dy = 1/2 & \text{si } 0 \le x \le 2; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Para $0 \le x \le 2$, la densidad condicional de Y dado que $X = x$ es entonces

$$p(y|X = x) = \frac{p(x,y)}{p(x)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x/2 \le y \le 1 + x/2; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

La esperanza condicional resulta

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_{x/2}^{1+x/2} y dy = \frac{1}{2}\left((1 + x/2)^2 - (x/2)^2\right) = \frac{1+x}{2}.$$

Ejercicio 12

Llamemos X a la altura e Y a la longitud de la mano. Consideremos las variables estandarizadas

$$U = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad V = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

Entonces U y V tienen distribución normal bi-variada estándar de correlación $\rho = 1/2$. Esto quiere decir que existe Z, normal estándar, independiente de U tal que

$$V = \rho U + \sqrt{1-\rho^2}Z.$$

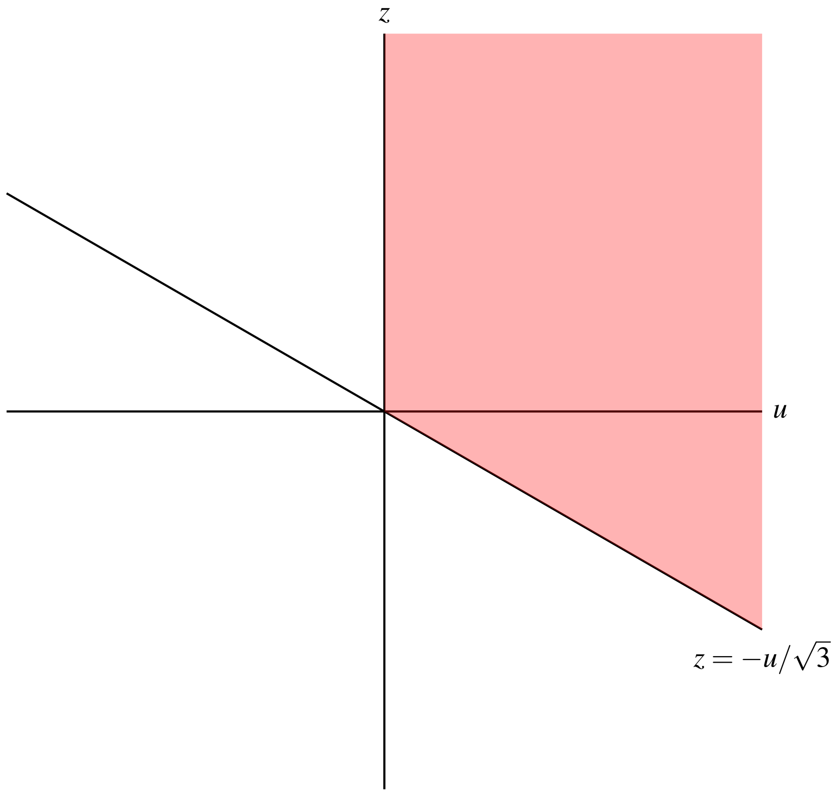
Queremos calcular la probabilidad condicional

$$P(Y > \mu_Y | X > \mu_X) = P(V > 0 | U > 0) = \frac{P(V > 0, U > 0)}{U > 0} = 2P(V > 0, U > 0).$$

El lado derecho se puede escribir como

$$P\left(Z > -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}U, U > 0\right) = P\left(Z > -\frac{1}{\sqrt{3}}U, U > 0\right)$$

Este evento corresponde al sector indicado en rojo en la siguiente figura:



Como $\operatorname{atan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, vemos que el ángulo que sustenta dicho sector es

$$\pi/2 + \pi/6 = 2\pi/3.$$

Luego, por la simetría rotacional, la probabilidad de dicho sector es $(2\pi/3)/(2\pi) = 1/3$.

Finalmente, la probabilidad condicional buscada es $2(1/3) = 2/3$.