Solución Segundo Parcial
Sábado 23 de junio 2018.

Ejercicio 1. [**10 puntos**]

Se desea estudiar el efecto de un nuevo producto en el tiempo de secado de la pintura. Para esto se divide al azar un lote de 16 paneles pintados en dos grupos de 8, unos reciben el tratamiento con el nuevo producto (Tratamiento) y los otros se usan de control. Los tiempos de secado (en horas) se muestran en el diagrama de tallos (espalda con espalda) que está a la derecha.

Tratamiento		Control
00	21	
0000	22	0
0	23	0
0	24	000
	25	00
	26	0

Considere la hipótesis nula

$$H_0: \text{El tratamiento no tiene efecto sobre el tiempo de secado}$$

y el estadístico $X =$ (suma de respuestas en tratamiento)-(suma de respuestas en control). Se asume que el tratamiento no aumenta el tiempo de secado de la pintura.

1. Usando la Figura 1 (ver última página), calcular el p-valor $\text{pval}(X_{\text{obs}})$. Decidir si rechazar o no H_0 para el valor umbral $p_u = 0.05$.
2. Se considera la región de rechazo $I_r(c) = (-\infty, c]$. Usando la Figura 1, hallar el mayor valor de c para el cual la probabilidad de error de tipo I es a lo sumo $\alpha = 0.05$. Decidir si rechazar o no H_0.

Solución

1. Se considera
$$H_0: \text{El tratamiento no tiene efecto sobre el tiempo de secado}$$
y el estadístico $X =$ (suma de respuestas en tratamiento)-(suma de respuestas en control).

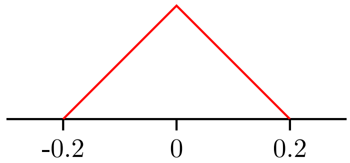
   A partir del diagrama de tallos se obtiene que $X_{obs} = 177 - 193 = -16$. Al asumir que el tratamiento no aumenta el tiempo de secado, las opciones son que reduzca o no tenga efecto, por lo tanto nos planteamos el test a una cola de donde $pval(X_{obs}) = P(X \leq X_{obs}) = P(X \leq -16)$. De la figura 1 (distribución de aleatorización de X) se obtiene que
$$pval(X_{obs}) = P(X \leq -16) = \frac{44+9+2}{C_8^{16}} = \frac{55}{12870} = 0.00427 < p_u = 0.05$$
   Por lo tanto, hay evidencia para rechazar H_0, es decir para afirmar que el tratamiento reduce el tiempo de secado.

2. Consideramos la región de rechazo $I_r(c) = (-\infty, c]$ y buscamos el máximo c tal que:
$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(X \in I_r(c)|H_o) = P(X \leq c|H_0) \leq 0.05$$
   De la Fig. 1 se obtiene que:
   - si $c = -12$ entonces $\alpha = \frac{412}{12870} = 0.032$.
   - si $c = -10$ entonces $\alpha = \frac{871}{12870} = 0.0646$.

   Por lo tanto $c = -12$, es decir la región de rechazo es $I_r = (-\infty, -12]$. Dado que $X_{obs} = -16 \in I_r$, entonces se rechaza H_0.

Ejercicio 2. [**12 puntos**]

Un fabricante A produce miles de rulemanes por día de diámetro X (en cm) donde $X = 2 + Z$ con Z una variable aleatoria cuya densidad está graficada a la derecha. Sean $\mu_X = \mathbf{E}(X)$ y $\sigma_X^2 = \mathbf{var}(X)$. Para el control de calidad, el fabricante desecha los rulemanes que no cumplen que $|X - \mu_X| \leq \sigma_X$.



1. ¿Qué proporción de producción se descarta?
2. Otro fabricante B produce rulemanes similares cuyo diámetro es $Y = 2(X - 1)$. Hallar y graficar la densidad de Y.
3. El fabricante B utiliza el mismo control de calidad que A para sus rulemanes (es decir, descarta aquellos que no cumplen $|Y - \mu_Y| \leq \sigma_Y$). Un cliente tiene un motor que solamente funciona con rulemanes cuyo diámetro está entre 1.9 y 2.1 cm. ¿A qué fabricante debe comprarle?

Solución

1. La probabilidad de descartar un ruleman es $P(|X - \mu_X| > \sigma_X)$. Calculemos primero μ_X y σ_X:

   - $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(2 + Z) = 2 + \mathbf{E}(Z) = 2$ ya que por simetría de la densidad de Z es fácil ver que $\mathbf{E}(Z) = 0$.
   - $\mathbf{var}(X) = \mathbf{var}(2 + Z) = \mathbf{var}(Z) = \mathbf{E}\left(Z^2\right)$.

   Para calcular $\mathbf{E}\left(Z^2\right)$ observar que la densidad de Z está dada por:

   $$f_Z(x) = \begin{cases} -25x + 5 & \text{si } x \in [0, 0.2] \\ 25x + 5 & \text{si } x \in [-0.2, 0] \end{cases}$$

   Usamos que la altura del triángulo debe ser 5 para que la gráfica represente una densidad, es decir tenga área 1.

   Por lo tanto:

   $$\mathbf{E}\left(Z^2\right) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_Z(x)dx = \int_{-0.2}^{0} x^2(-25x + 5)dx + \int_{0}^{0.2} x^2(25x + 5)dx = \frac{1}{150}$$

   De donde $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{150}} = 0.0082$.

   La probabilidad buscada resulta entonces:

   $$\begin{aligned} P(|X - \mu_X| > \sigma_X) &= P(|Z| > 0.082) = 2P(Z \in [0.082, 0.2]) \\ &= 2\frac{(0.2 - 0.082)(-25 \times 0.082 + 5)}{2} = 0.118 \times 2.95 = 0.35. \end{aligned}$$

   Es decir que se descartan el 35% de los rulemanes fabricados.

   La manera geométrica de hacer este mismo cálculo es observar que el triángulo de lado 0.118, tiene un área que es $\left(\frac{0.118}{0.2}\right)^2 = 0.35$ menor.

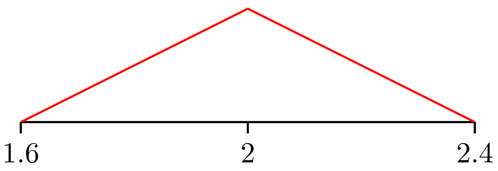
2. $Y = 2X - 2 = 2(2 + Z) - 2 = 2Z + 2 = g(Z)$ con $g(x) = 2x + 2$. Es decir que Y se obtiene como un cambio de variable lineal de Z con $a = b = 2$ y tenemos que:

   $$f_Y(y) = \frac{1}{2} f_Z\left(\frac{y - 2}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-25\frac{y-2}{2} + 5\right) & \text{si } \frac{y-2}{2} \in [0, 0.2], \\ \frac{1}{2}\left(25\frac{y-2}{2} + 5\right) & \text{si } \frac{y-2}{2} \in [-0.2, 0]. \end{cases}$$

   Es decir,

   $$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{-25}{4}y + 15 & \text{si } y \in [2, 2.4], \\ \frac{25}{4}y - 10 & \text{si} y \in [1.6, 2]. \end{cases}$$

   Grafica de la densidad de Y: como esperamos la gráfica de la densidad de Y se obtiene con una traslación y un cambio de escala de la densidad de Z.



En este caso la altura del triángulo resulta ser 5/2.

También se puede transformar primero el triángulo, haciendo el cambio de escala y la traslación y calcular la densidad a partir del mismo.

3. Sean D_X y D_Y los sucesos:

   - $D_X = \{$el ruleman del fabricante A no fue descartado$\}$
   - $D_Y = \{$el ruleman del fabricante B no fue descartado$\}$

   Lo que nos interesa comparar es $P(X \in [1.9, 2.1]|D_X)$ con $P(Y \in [1.9, 2.1]|D_Y)$, es decir de los rulemanes que fueron puestos a la venta cuál tiene mayor probabilidad de cumplir que el diámetro esté entre 1.9 y 2.1

   Observar primero que en la parte 1, calculamos $P(D_X^c) = P(|Z| > 0.082) = 0.35$. Además utilizando el mismo criterio para descartar rulemanes, tenemos que la probabilidad de que el fabricante B descarte un ruleman es $P(D_Y^c) = P(|Y - \mu_Y| > \sigma_Y)$ donde $\mu_Y = 2\mu_X - 2 = 2$ y $\mathbf{var}\,(Y) = 4\mathbf{var}\,(X) = \frac{4}{150}$ (es decir $\sigma_Y = \sqrt{\frac{4}{150}} = 2\sigma_X = 0.16$). En este caso, tenemos que la probabilidad de descarte coincide para ambos fabricantes ya que:

   $$P(D_Y^c) = P(|2X - 2 - 2| > 2\sigma_X) = P(|X - 2| > \sigma_X) = P(|Z| > \sigma_X) = P(|Z| > 0.082) = 0.35.$$

   Finalmente observemos que el suceso $\{X \in [1.9, 2.1]\} = \{Z \in [-0.1, 0.1]\} \supset D_X$. Por lo tanto la probabilidad de que un ruleman no descartado por el fabricante X cumpla la condición de interés es 1.

   Por otro lado, el suceso $\{Y \in [1.9, 2.1]\} = \{2Z + 2 \in [1.9, 2.1]\} = \{Z \in [-0.05, 0.05]\}$, es decir que $\{Y \in [1.9, 2.1]\} \cap D_Y \neq \emptyset$. Por lo tanto habrá una proporción de los no descartados que no cumplen con la condición de interés.

   Es por esto que preferimos comprarle al fabricante A.

   Podemos también hacer el cálculo exacto de las probabilidades deseada, obteniendo:

   $$\begin{aligned} P(Y \in [1.9, 2.1]|D_Y) &= \frac{P(Z \in [-0.05, 0.05] \cap |Z| \leq 0.082)}{P(D_Y)} = \frac{P(Z \in [-0.05, 0.05])}{P(D_Y)} \\ &= \frac{1 - 2P(Z > 0.05)}{P(D_Y)} = \frac{1 - 0.5625}{0.75} = 0.64. \end{aligned}$$

   donde $P(Z > 0.05)$ la calculamos usando el área del triángulo correspondiente a dicho suceso.

Ejercicio 3. [**10 puntos**]

Ana y Beto acuerdan en encontrarse a las 12 del mediodía para almorzar. Ana llega a una hora con distribución normal de media 12:00 pm y desvío estándar 5 min. Beto llega a una hora con distribución normal de media 12:02 pm y desvío estándar 3 min. Asumiendo que la hora de llegada de Ana y Beto son independientes, calcular la probabilidad de que:

1. Ana llegue antes que Beto.
2. La hora de llegada de Ana y Beto no difiera en más de 3 minutos.

Solución

Sea X el tiempo de llegada de Ana e Y el tiempo de llegada de Beto. Si utilizamos como unidad los minutos y nos fijamos el cero como las 12.00, resulta que $X \sim \mathcal{N}(0, 5^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(2, 3^2)$. Además se asume que son independientes.

1. $P($ Ana llegue antes que Beto$) = P(X < Y) = P(X - Y < 0)$

   Por ser X e Y independientes resulta que la combinación lineal $D = X - Y$ también tiene distribución Normal con parámetros $\mu = 0 - 2 = -2$ y $\sigma^2 = 5^2 + 3^3 = 34$ (es decir $\sigma = 5.83$). Normalizando tenemos que $\frac{D-(-2)}{5.83} = \frac{D+2}{5.83} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   Por lo tanto:
$$P(X - Y < 0) = P\left(\frac{D+2}{5.83} < \frac{2}{5.83}\right) = \Phi(0.34) = 0.6331.$$

2. Nos piden $P(|X - Y| < 3)$:
$$\begin{aligned} P(|X-Y|<3) &= P(-3 < D < 3) = P\left(\frac{-1}{5.83} < \frac{D+2}{5.83} < \frac{5}{5.83}\right) = \Phi(0.86) - \Phi(-0.17) \\ &= \Phi(0.86) + \Phi(-0.17) - 1 = 0.8051 + 0.5675 - 1 = 0.3726. \end{aligned}$$

Ejercicio 4. [**10 puntos**]

Un estudio indica que la elasticidad (en MPa) y la densidad (en g/cm^3) de un tipo de goma se ajustan al modelo normal bi-variado. La siguiente tabla indica la estimación de sus parámetros:

Densidad	media: 1	desvío: 0.2
Elasticidad	media: 100	desvío: 8
correlación: -0.8		

1. Se dispone de un ejemplar de goma cuya densidad es 0.75. ¿En cuánto estimarías su elasticidad?
2. Para el ejemplar de la parte anterior, dar un intervalo centrado en el pronóstico que contenga su elasticidad con probabilidad 0.95.
3. Se dispone de un ejemplar de goma cuya densidad se sabe es mayor que 0.8. Estimar su elasticidad.

Solución

Sea X la densidad de la goma e Y la elasticidad. Tenemos entonces que:

- $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ con $\mu_X = 1$ y $\sigma_X = 0.2$.
- $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ con $\mu_Y = 100$ y $\sigma_Y = 8$.
- Coeficiente de correlación: $\rho = -0.8$.

1. Sean $U = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = \frac{X-1}{0.2} = 5(X-1)$ y $V = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} = \frac{Y-100}{8}$. Entonces (U,V) es una normal bivariada estándar con correlación $\rho = -0.8$ y sabemos que $\mathbf{E}(V|U=u) = \rho u$.

   Sabiendo que la densidad es $X = 0.75$, resulta que $U = 5(0.75-1) = -1.25$ y por lo tanto $\mathbf{E}(V|U=-1.25) = -0.8 \times -1.25 = 1$. Volviendo a normalizar, tenemos que la predicción para la elasticidad es $\mathbf{E}(Y|X=0.75) = 8 \times 1 + 100 = 108$

2. Buscamos un intervalo $I = [108-\epsilon, 108+\epsilon]$ tal que $P(Y \in I|X=0.75) = P(|Y-108| < \epsilon|X = 0.75) = 0.95$:

   Observar que por definición:
$$Y - 108 = Y - \mathbf{E}(Y|X=0.75) = \sigma_Y V + \mu_Y - (\sigma_Y \rho U + \mu_Y) = \sigma_Y(V - \rho U) = \sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}Z$$
   con Z normal estándar independiente de U. Por lo tanto, ϵ tiene que ser tal que:
$$P(Y \in I|X=0.75) = P(|\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}Z| < \epsilon|U=-1.25) = P\left(|Z| < \frac{\epsilon}{8\sqrt{1-(0.8)^2}}\right) = 0.95$$
   donde en la penúltima igualdad usamos que U y Z son independientes.

   Utilizando al tabla de la normal "al revés" resulta que $\frac{\epsilon}{8\sqrt{0.36}} = 1.96$, de donde $\epsilon = 1.96 \times 4.8 = 9.41$. El intervalo resulta entonces $I = [108 - 9.41, 108 + 9.41] = [98.6, 117.4]$.

3. Tenemos que calcular $\mathbf{E}(Y|X > 0.8) = \mathbf{E}(8V + 100|U > -1) = 8\mathbf{E}(V|U > -1) + 100$.

   Utilizaremos el siguiente resultado: si (U, V) normal bivariada estándar con correlación ρ entonces,

$$\mathbf{E}(V|a < U < b) = \frac{\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{-a^2/2} - e^{-b^2/2}\right)}{\Phi(b) - \Phi(a)}$$

   En este caso $a = -1$ y $b = +\infty$, de donde $e^{-b^2/2} = 0$ y $\Phi(b) = 1$, es decir:

$$\mathbf{E}(V|U > -1) = \frac{\frac{-0.8}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2}}{1 - \Phi(-1)} = \frac{-0.8e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}\Phi(1)} = \frac{-0.8e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}0.8413} = -0.23.$$

   Resulta entonces que la predicción es $\mathbf{E}(Y|X > 0.8) = -8 \times 0.23 + 100 = 98.16$.

Ejercicio 5. [**10 puntos**]

Sea X una variable aleatoria con la siguiente densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-|x|/\sigma}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Sea $X_1, \ldots, X_n$ un muestreo aleatorio de X.

1. Hallar $\hat{\sigma}$ el estimador de máxima verosimilitud de σ.
2. Calcular el sesgo de $\hat{\sigma}$.

Solución

1. Consideremos la función de verosilimitul $L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i)$:

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|X_i|}{\sigma}} = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{\sigma}}$$

   Aplicando logaritmo:

$$l(\sigma) = \log(L(\sigma)) = -n\log(2\sigma) - \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{\sigma}$$

   Derivando respecto a σ:

$$l'(\sigma) = -n\frac{2}{2\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{\sigma^2} = 0 \text{ si } \hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

   Estudiando el signo de $l'(\sigma)$ resulta además que $\hat{\sigma}$ es un máximo. Por lo tanto el estimador de máxima verosimilitud de σ resulta ser:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

2.

$$\mathbf{E}(\hat{\sigma}) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(|X_i|) = \mathbf{E}(|X_i|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{e^{-\frac{|x|}{\sigma}}}{2\sigma} dx = 2\int_{0}^{\infty} x \frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}}{2\sigma} dx = \sigma$$

   Por lo tanto sesgo$(\hat{\sigma}) = \mathbf{E}(\hat{\sigma}) - \sigma = 0$.

   Otra forma de calcular $E(|X_i|)$ es observando que $|X_i|$ es una v.a. exponencial de parmetro $\frac{1}{\sigma}$.

Ejercicio 6. [**8 puntos**]

1. Sea X una variable aleatoria con densidad f_X y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y derivable. Probar que la densidad de la variable aleatoria $Y = g(X)$ está dada por $f_Y(y) = \frac{1}{dy/dx} f_X(x)$ con $y = g(x)$.
2. Sean X e Y variables aleatorias con distribución normal bi-variada estándar de correlación ρ. Probar que la función de regresión de Y en función de X, es decir $F(x) = \mathbf{E}(Y|X = x)$, está dada por $F(x) = \rho x$.

Solución

1. Queremos calcular la función de densidad $f_Y(y)$ para y en el rango de Y. Para un intervalo infinitesimal dy alrededor de y, el evento $\{Y \in dy\}$ es idéntico al evento $\{X \in dx\}$, donde dx es un intervalo infinitesimal alrededor del único x tal que $y = g(x)$. Dicho x es único ya que la función g es estrictamente creciente. Obtenemos entonces que:

   $$P(Y \in dy) = P(X \in dx) \text{ con } y = g(x).$$

   Esta igualdad se traduce en términos de densidades en

   $$f_Y(y)dy = f_X(x)dx,$$

   y por lo tanto

   $$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} f_X(x) \text{ con } y = g(x).$$

   Otra forma de demostrarlo es usando la función de distribución, es decir:

   $$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

   donde hemos usando que g es invertible y estrictamente creciente para que mantenga la desigualdad. Derivando la función de distribución obtenemos la densidad:

   $$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(y)}$$

   Considerando que $y = g(x)$ tenemos la equivalencia con la fórmula anterior.

2. (X, Y) es normal bi-variada estándar de correlación ρ, es decir que existe Z normal estándar independiente de X tal que $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$.

   Queremos calcular la función de regresión de Y en función de X, es decir $F(x) = \mathbf{E}(Y|X = x)$. Para esto calculemos la distribución condicional de Y al evento $X = x$.

   Dado que $X = x$ resulta que $Y = \rho x + \sqrt{1-\rho^2}Z$ normalización de Z normal estándar, es decir que $Y|_{X=x} \sim \mathcal{N}(\rho x, 1 - \rho^2)$.

   Por lo tanto $F(x) = \mathbf{E}(Y|X = x) = \rho x$.

   Otra forma de demostralo es por cálculo directo de la densidad condicional:

   $$\mathbf{E}(Y|X = x) = \mathbf{E}\left(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z|X = x\right) = \mathbf{E}\left(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}Z|X = x\right)$$
   $$\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\mathbf{E}(Z|X = x) = \rho x + \sqrt{1-\rho^2}\mathbf{E}(Z) = \rho x$$

   en donde en la penúltima igualdad hemos usado el hecho de que Z y X son independientes, y en la última que $\mathbf{E}(Z) = 0$.

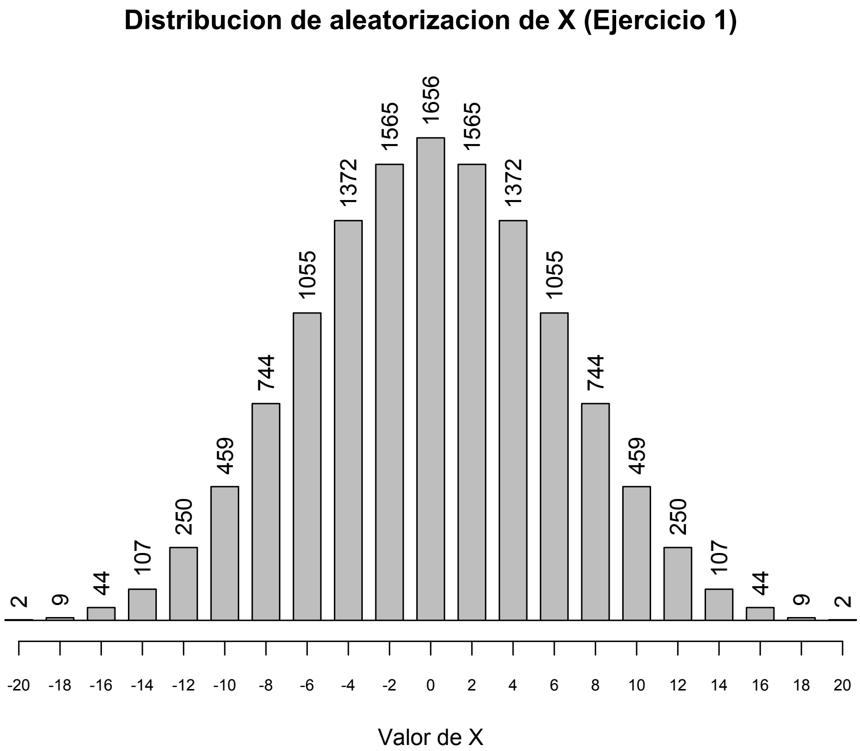


Figure 1: Distribución de aleatorización de X para usar en el Ejercicio 1.

Tabla de la normal estándar

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Definiciones y fórmulas que pueden ser útiles

- X tiene distribución uniforme en $[a,b]$ si tiene densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } x \in [a,b]; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

  La esperanza de X es $\mathbf{E}(X) = (a+b)/2$ y la varianza es $\mathbf{var}(X) = (b-a)^2/12$.

- X tiene distribución exponencial de parámetro λ si tiene densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

  La esperanza de X es $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$ y la varianza es $\mathbf{var}(X) = 1/\lambda^2$.

- X tiene distribución normal estándar si tiene densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \ x \in \mathbb{R}$$

  La esperanza de X es $\mathbf{E}(X) = 0$ y la varianza es $\mathbf{var}(X) = 1$.

- (X,Y) tiene distribución normal bi-variada **estándar** de correlación ρ si X e Y tienen distribución normal estándar y existe Z normal estándar independiente de X tal que $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} Z$. En este caso, se tiene

$$\mathbf{E}(Y|X=x) = \rho x \qquad \text{y} \qquad \mathbf{E}(Y|a < X < b) = \frac{\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{-a^2/2} - e^{-b^2/2}\right)}{\Phi(b) - \Phi(a)}.$$