Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

Segundo Parcial
Sábado 24 de junio 2017.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

PARA USO DOCENTE		
Ej. 1	Ej. 2	TOTAL

Ejercicio 1. [**27 puntos**] La Tabla 1 muestra la frecuencia de partidos según la cantidad de goles en el mundial de fútbol de Francia 98. En total se jugaron 64 partidos y se hicieron 170 goles.

Table 1: Goles en el mundial de Francia 98

Número total de goles por partido	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
Frecuencia de partidos con esa cantidad de goles	5	11	12	18	11	6	0	1	64

Por ejemplo, hubo 5 partidos en los que no hubo goles, y hubo un solo partido en los que se convirtieron 7 goles. Sea X la variable aleatoria que cuenta la cantidad de goles en un partido de fútbol de 90 minutos de duración.

1. En esta parte asumiremos que X tiene distribución de Poisson de parámetro λ.
   (a) Probar que $\overline{X}_n$ es un estimador insesgado de λ. Calcular el error cuadrático medio del estimador.
   (b) Usando los datos de la Tabla 1, determinar un intervalo de confianza para λ al nivel de confianza 0.9.
2. Dada una muestra $X_1, \ldots, X_n$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, consideramos F_n la función de distribución empírica de los datos, esto es $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$.
   (a) Para la muestra $X_1, \ldots, X_{64}$ definida por la Tabla 1, graficar $F_n(x)$.
   (b) Indicar moda, mediana, primer y tercer cuartil de la muestra. Realizar el boxplot correspondiente.
3. Sea p la probabilidad de que un partido termine con 1 solo gol.
   (a) A partir de los datos de la Tabla 1, determinar un intervalo de confianza asintótico (aproximado) para p al nivel de confianza 0.9.
   (b) Un amiga/o quiere apostar en una penca para el mundial de Rusia 2018 (también son 64 partidos) y en su predicción resulta que hay 17 partidos terminados con un solo gol. ¿Cuál es tu opinión sobre su predicción? Justifica tu respuesta.
4. Sea Y_i una variable aleatoria definida por:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si hay un gol en el } i\text{-ésimo minuto,} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

   Asumiendo que las variables $Y_1, \ldots, Y_{90}$ son independientes e idénticamente distribuidas, y que la probabilidad de que se haga un gol en un determinado minuto es pequeña, justificar que la distribución de X se puede aproximar por una Poisson.

Ejercicio 2. [**33 puntos**] La distribución de riqueza entre las personas de un país suele modelarse mediante una distribución Pareto. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Pareto de parámetros $a > 0$ y $\gamma > 1$ si es absolutamente continua con densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \gamma \frac{a^\gamma}{x^{\gamma+1}} & \text{si } x \geq a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además la función de distribución de X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma & \text{si } x \geq a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos entonces X la variable aleatoria que indica los ingresos de una persona en un determinado país, que tiene distribución Pareto de parámetros a y γ.

1. Probar que $\mathbf{E}(X) = a\frac{\gamma}{\gamma-1}$. Hallar la mediana de X.
2. Calcular la probabilidad $\mathbf{P}(X > \mathbf{E}(X))$. ¿Qué ocurre con esta probabilidad cuando γ decrece a 1? La yapa[1]: ¿Le parece que el promedio es un indicador representativo del ingreso de una persona en este caso?
3. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra de variables aleatorias i.i.d con distribución Pareto de parámetros a y γ. Asumiendo que a es conocido:
   (a) Hallar el estimador por momentos y por máxima verosimilitud de γ. ¿Se le ocurre algún otro estimador de γ diferente de los dos anteriores?
   (b) Asumimos ahora que $\gamma > 2$. Hallar σ^2 la varianza de X y probar que $g(\overline{X}_n)$ es un estimador de σ^2 siendo
   $$g(x) = \frac{(x-a)^2 x}{2a - x}$$
   definida para $x > 2a$.
4. Se tienen datos de ingresos en el Uruguay según la encuesta de hogares del 2014. De estos, se tomaron aquellos salarios mayores a 12.000 pesos (salario mínimo nacional) y menores que 89.000, que resulta en una muestra de $n = 16662$ personas. En el cuadro que sigue se muestra un resumen estadístico de dichos datos (los datos se expresan en miles de pesos):

min	q_1	m_X	$\overline{x}$	q_3	max	s_n
12	15	20	23.71	28	89	12.26

   donde min es el mínimo de los datos, max es el máximo, m_X es la mediana empírica, $\overline{x}$ es el promedio, q_1 y q_3 son el primer y tercer cuartil de la muestra respectivamente y s_n es el desvío estándar. Para las siguientes preguntas, se asume que $a = 12$.
   (a) Estimar γ e indicar un intervalo de confianza asintótico (aproximado) a nivel 0.95 para γ.
   (b) Estimar la probabilidad de que el promedio de ingresos de la muestra sea menor o igual a 25.000 pesos uruguayos.

[1] Esta última pregunta es por dos puntos extras.