Universidad de la República **Probabilidad y Estadística**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

SEGUNDO PARCIAL
LUNES 27 DE JUNIO DE 2016.

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

PARA USO DOCENTE.			
Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	TOTAL

Ejercicio 1. [20 puntos]

Para evitar accidentes de tráfico, es importante que el conductor tenga una rápida reacción ante un estímulo que en general es visual. Es sabido que el tiempo de reacción T (medido en milisegundos) ante un estímulo de estas características se puede modelar según una distribución Exponencial, es decir:

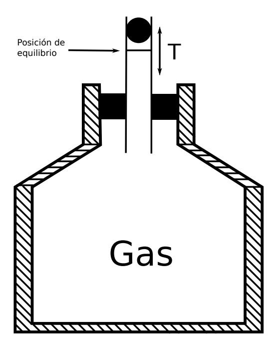
$$f_T(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo el tiempo medio de reacción depende de muchos factores, entre ellos la edad. En particular en base a estudios en simuladores se estima que para los menores de 60 años el tiempo medio de reacción es de 10 milisegundos, mientras que para los mayores de 60 años (incluyendo al 60) el tiempo medio es de 13 milisegundos. Se sabe además que el 30 % de la población tiene 60 o más años.

1. Hallar λ_1 y λ_2 parámetros de la distribución Exponencial para el grupo de menores y mayores de 60 años respectivamente.
2. Dado $t > 0$, hallar la probabilidad de que el tiempo de reacción de un individuo elegido al azar en la población sea mayor o igual a t.
3. Calcular el tiempo medio de reacción de un individuo elegido al azar en la población.
4. Con el objetivo de reducir los accidentes de tránsito, se implementa una prueba de tiempo de reacción ante un estímulo visual para obtener la libreta de conducir. Se fija un nivel crítico en el tiempo de reacción igual a $t_c = 20$ milisegundos y en caso de que el tiempo de reacción supere este nivel crítico, el postulante no obtiene la licencia.
   a) Hallar la probabilidad de que un individuo elegido al azar obtenga la libreta de conducir.
   b) Sabiendo que un individuo obtuvo la libreta de conducir, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor a 60 años?

Ejercicio 2. [30 puntos]

Para determinar la eficiencia de una máquina térmica que funciona con un gas ideal, se debe conocer con precisión un coeficiente κ que depende del gas (κ es el coeficiente adiabático). Esto se hace por medio del siguiente experimento: el gas se halla contenido en un gran recipiente. Ajustado al recipiente hay un tubo de vidrio dentro del cual una bola metálica encaja perfectamente como un pistón. Si se desplaza la bola ligeramente hacia abajo y después se la suelta, oscilará con un período T. Eligiendo adecuadamente las dimensiones del recipiente y la masa de la bola, se sabe que la relación entre el período y el coeficiente es



$$\kappa = T^2.$$

Como la medición de T está sujeta a error, supondremos que $T = T_0 + \epsilon$, en donde el error ϵ tiene distribución $N(0, \sigma^2)$ con σ conocido. Se asume que T_0 y σ son tales que la probabilidad de que T sea negativo es despreciable.

1. *a*) Indicar la distribución de T y hallar la esperanza de κ (en función de σ).
   b) Determinar la función de distribución y la función de densidad de κ.
   c) El verdadero valor de κ es $\kappa_0 = T_0^2$, siendo T una variable que podemos medir (en segundos). Sea entonces $T_1, \ldots, T_n$ una muestra aleatoria simple de T, y consideremos

$$\hat{\kappa}_1 = \left(\frac{T_1 + \cdots + T_n}{n}\right)^2 = (\overline{T}_n)^2 \text{ y } \hat{\kappa}_2 = \frac{T_1^2 + \cdots + T_n^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2.$$

   1) Indicar si $\hat{\kappa}_1$ y $\hat{\kappa}_2$ son estimadores de κ_0. Justifique su respuesta.
   2) En caso afirmativo, calcular su sesgo.

2. Se realizaron las siguientes mediciones de T:

0,847	0,860	1,108	0,803	0,806	0,982	1,215	0,763	1,074	1,381

   Sabiendo que $\sigma = 0{,}2s$:

   a) Dar un valor estimado para T_0 y para κ_0.
   b) Hallar un intervalo de confianza al nivel 95 % para T_0.
   c) 1) Plantear un test de hipótesis al nivel $\alpha = 0{,}95$ para decidir si es posible afirmar que $T_0 = 1s$. ¿Cuál es la decisión?
   2) Si se toma como hipótesis alternativa $H_1 : T_0 = 1{,}15s$, calcular β probabilidad de error tipo II.

Ejercicio 3. [10 puntos]

Para saber si una moneda está equilibrada se decide tirarla 30 veces y observar la ocurrencia de caras. Al realizarse la experiencia se obtuvieron 11 caras. Sea $p \in (0, 1)$ la probabilidad de que salga cara en una tirada.

1. Se plantea un test de hipótesis exacto para proporciones:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0{,}5 \\ H_1 : p < 0{,}5 \end{cases}$$

   Usando la Figura 1 calcular α^* el p-valor para dicho test. ¿Cuál sería la decisión para $\alpha = 0{,}05$ y para $\alpha = 0{,}15$?

2. En la Figura 2 se grafica en función de p_0 (para $n = 30$ y $\alpha = 0{,}1$) la región de rechazo para el test de hipótesis

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

   Indicar la región de rechazo para $p_0 = 0{,}45$ ¿Qué decisión tomarías en este caso?

3. Usando la Figura 2 determinar un intervalo de confianza al nivel 90 % para p.

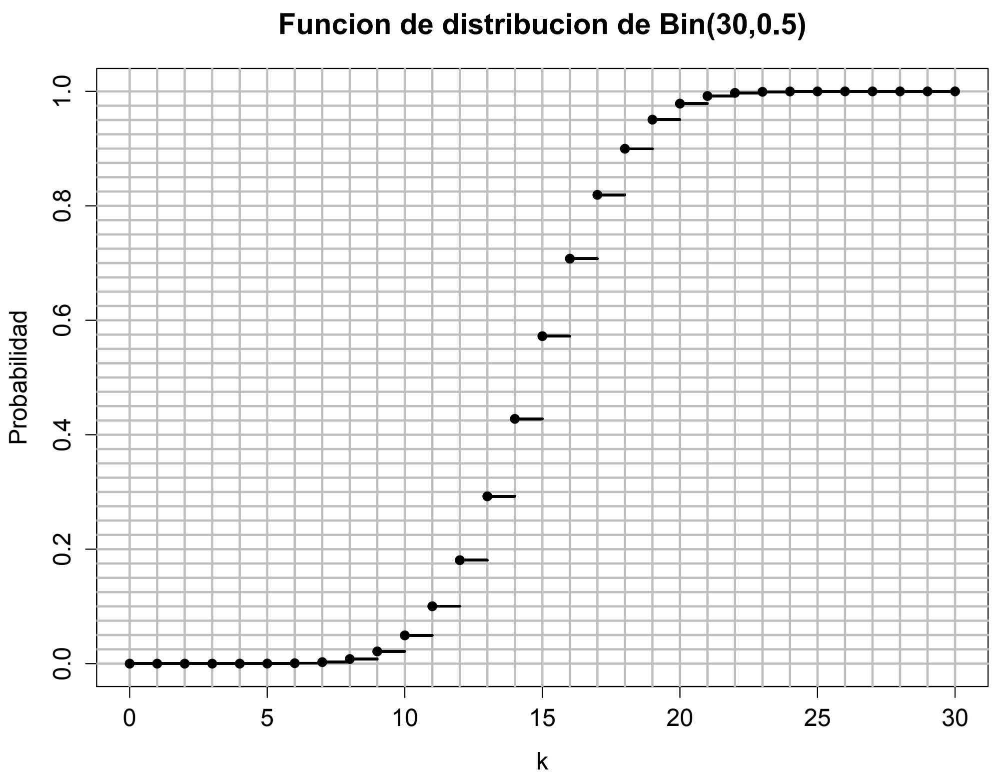


Figura 1: Gráfica de la función de distribución de Bin$(30, 0{,}5)$. Las líneas verticales pasan por los enteros, y la distancia entre las líneas horizontales es de 0,025.

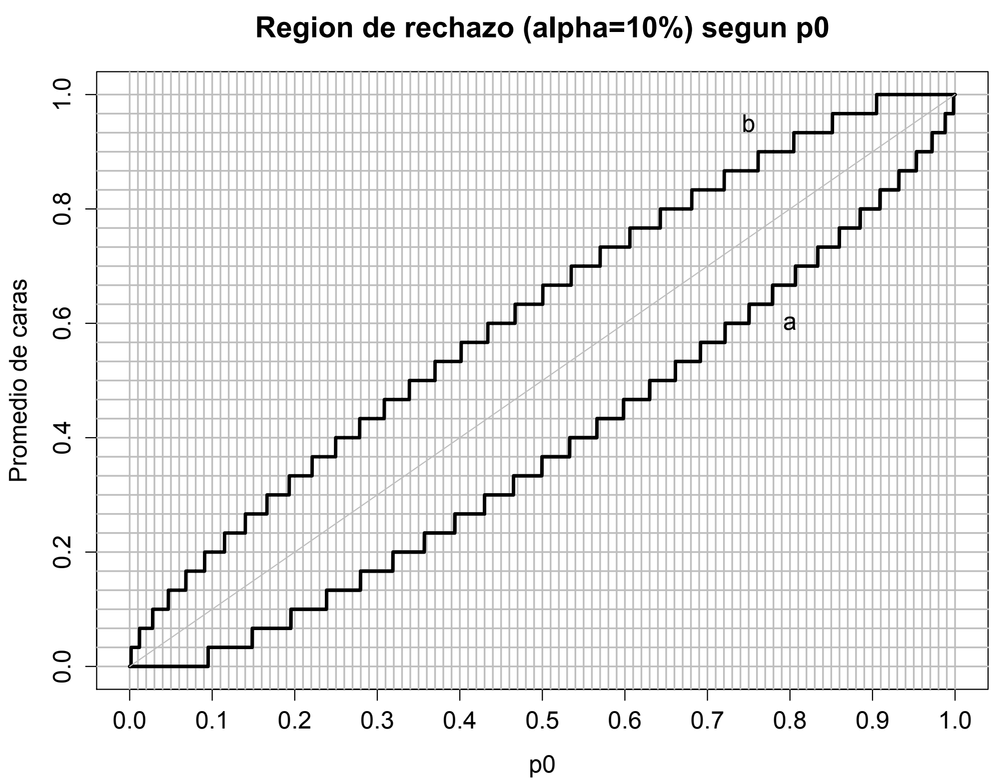


Figura 2: Gráfica de la región de rechazo $\mathcal{R}_\alpha = \left\{\overline{X}_n \notin [a, b]\right\}$ en función de p_0. Las líneas finas verticales distan 0,01, y las horizontales pasan por los posibles valores del promedio de caras, es decir $\{\frac{k}{30} : k \in \{0, \ldots, 30\}\}$.