

SEGUNDO PARCIAL
MARTES 1 DE DICIEMBRE DE 2015

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

Ejercicio 1. Se sabe que en una cierta localidad el 5% no tiene computadora en su casa, el 45% tiene una computadora y el 50% tiene dos computadoras. Las computadoras pueden ser laptops o PCs, y la probabilidad de que una computadora sea una laptop es $p = 0.3$. Se elige una persona al azar de dicha comunidad y se definen las siguientes variables aleatorias:

- X = número de computadoras de la persona.
 - Y = número de laptops de la persona.
1. Indicar \mathcal{R}_X recorrido de la variable X y su función de probabilidad, esto es $P(X = k)$ con $k \in \mathcal{R}_X$.
 2. Sabiendo que $X = k$, hallar la distribución de Y .
 3. Hallar la función de probabilidad conjunta de X e Y . Sugerencia: dar el resultado en forma de cuadro.
 4. Hallar la función de probabilidad marginal de Y .
 5. Calcular $E(X)$ y $E(Y)$.
 6. ¿Son X e Y independientes? Hallar $Cov(X, Y)$.
 7. Hallar la probabilidad de que el número de laptops de la persona supere al número de PCs.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \in [0, 1] \\ b(2 - x) & \text{si } x \in (1, 2] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde a y b son constantes reales positivas.

1. Hallar el conjunto de valores de a y b para los cuáles f es la densidad de una variable aleatoria X . Sugerencia: graficar f .
2. Definir un estimador consistente de a . ¿Es insesgado? Justifique su respuesta.
3. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria simple de la variable X , es decir variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad f . A partir de la muestra definir un intervalo de confianza aproximado a nivel α para el parámetro a .
4. (a) Calcular m_X mediana de X , suponiendo que m_X es menor que 1.

(b) Definir un nuevo estimador de a , diferente al hallado en la parte 2b.

5. Se toma una muestra de la variable aleatoria X y se observa que el 76,3% de los datos son menores que 1. A partir de esta información, dar estimaciones de los parámetros a y b .

Ejercicio 3. La cantidad de líquido (en ml) dispensada por una máquina embotelladora de refrescos puede modelarse como una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(1000, 10^2)$, es decir normal con parámetros $\mu = 1000$ y $\sigma = 10$. Durante unos días la máquina falla y dispensa menos líquido del debido. En ese período la cantidad (en ml) de líquido por envase se comporta según una variable aleatoria $Y \sim \mathcal{N}(995, 10^2)$. Luego la máquina es reparada y vuelve a dispensar líquido según su distribución habitual X .

Sin embargo, la empresa tarda en detectar la falla y por lo tanto hay varios lotes que no se sabe si fueron envasados durante la falla o no. La empresa no quiere poner a la venta los lotes fallados y encarga al ingeniero de planta decidir cuáles de esos lotes pueden ser puestos a la venta y cuáles deben ser retirados. Se toma uno de estos lotes (de 12 botellas) y se registran la cantidad de líquido de cada botella.

1. Plantear un test de hipótesis paramétrico que permita al ingeniero decidir si el lote es apto para la venta o no. Para esto, indicar:
 - (a) hipótesis nula y alternativa,
 - (b) región crítica a nivel α .
2. Para el test definido en la parte anterior y dado $\alpha = 0.05$, calcular $\beta = P(\text{error tipo II})$.
3. Para uno de los lotes revisados, se tienen las siguientes cantidades:

995	998	997	1003	1007	999	1002	1009	1010	985	1005	981
-----	-----	-----	------	------	-----	------	------	------	-----	------	-----

Determinar si el lote puede ser puesto a la venta para los niveles de confianza $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$. Hallar α^* , p-valor del test para esta muestra.

4.
 - (a) Asumiendo que la máquina funciona correctamente, calcular p_0 la probabilidad de que el líquido en la botella sea menor o igual que 995ml.
 - (b) A partir de la muestra anterior construir un intervalo de confianza a nivel $\alpha = 0.05$ para p_0 .
 - (c) En base a la parte anterior ¿le parece razonable asumir que el lote puede ser puesto a la venta? Justifique su respuesta.