Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2015
Segundo Parcial, 2 de julio de 2015

Nº de Parcial	Cédula	Apellido y Nombre	Salón

Parte de Múltiple Opción (Total: 20 puntos)

Respuesta correcta: 5 puntos	**Respuesta incorrecta: -1 punto**	**Respuesta en blanco: 0 punto**

1. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. $\mathcal{U}(\theta - 1, \theta + 1)$, con $\theta \in R$, $X_1^* = min\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_n^* = max\{X_1, \dots, X_n\}$ y $\hat{\theta}_{MM}$, $\hat{\theta}_{MV}$ los estimadores de θ por el Método de los Momentos y Máxima Verosimilitud respectivamente. Entonces se cumple que:

   A. $\hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{MV} = \bar{X}_n$.

   B. $\hat{\theta}_{MM} = 0$ y $\hat{\theta}_{MV}$ es cualquier valor en el intervalo $[X_n^* - 1, X_1^* + 1]$.

   C. $\hat{\theta}_{MM} = \bar{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV}$ es cualquier valor en el intervalo $[X_n^* - 1, X_1^* + 1]$.

   D. $\hat{\theta}_{MM} = \bar{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = X_1^* - 1$.

   E. $\hat{\theta}_{MM} = \bar{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV}$ no existe.

   F. $\hat{\theta}_{MM} = \bar{X}_n$ y $\hat{\theta}_{MV} = X_n^* + 1$.

2. Se realiza una encuesta a 100 personas preguntándoles cuántas personas viven en su casa.
   El resultado fue el siguiente:

Resultado	1	2	3	4	5
Frecuencia	11	23	34	19	13

   Sea X la variable aleatoria que cuenta cuántas personas viven en una casa elegida al azar en la ciudad en la que se hizo el estudio. Se realiza la prueba de hipótesis: $\begin{cases} H_0 : E(X) = 3 \\ H_1 : E(X) > 3 \end{cases}$. Si la región crítica es $R = \{\overline{X}_n > 3.25\}$. El valor aproximado de la probabilidad de error de tipo I es (dar el valor más cercano a α):

   A. $\alpha \cong 0.0085$

   B. $\alpha \cong 0.4168$

   C. $\alpha \cong 0.2084$

   D. $\alpha \cong 0.5832$

   E. $\alpha \cong 0.0532$

   F. $\alpha \cong 0.017$

3. Se dispone de una muestra i.i.d. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de datos normales con media μ y desvío σ (conocido) y se considera la prueba de hipótesis $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$, con región crítica $R = \{\overline{X}_n > 1,645\, \sigma/\sqrt{n}\}$. Sabiendo que se cumple $\mu = 1$, la probabilidad de error tipo II (β) de la prueba es:

   A. $\Phi\,(1,645\ - \sqrt{n}/\sigma)$.

   B. $\Phi(1,645\, \sigma/\sqrt{n})$.

   C. $1 - \Phi(1,645\, \sigma/\sqrt{n})$.

   D. $1 - \Phi\,(1,645\ - 1/\sigma)$.

   E. $1 - \Phi\,(1,645\ - \sqrt{n}/\sigma)$.

   F. $\Phi\,(1,645\ - 1/\sigma)$.

4. Sean $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ variables aleatorias *i.i.d.* exponenciales de parámetro λ.
   Para cada $i = 1, 2, \cdots$ se definen: $Y_i = \overline{X}_i = \frac{X_1 + \cdots + X_i}{i}$, $Z_i = min\{X_1, \cdots, X_i\}$.
   Considerar las siguientes afirmaciones:

   i. Y_i y Z_i son independientes para todo i.

   ii. Y_i converge casi seguro a una constante cuando i tiende a infinito.

   iii. $E(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}) = \frac{1}{n\lambda}$.

   A. Las tres afirmaciones son correctas.

   B. Sólo las afirmaciones *i* y *ii* son correctas.

   C. Sólo las afirmaciones *ii* y *iii* son correctas.

   D. Sólo las afirmaciones *i* y *iii* son correctas.

   E. Ninguna afirmación es correcta.

   F. Sólo la afirmación *ii* es correcta.

   Sugerencia: Recordar que el mínimo de un conjunto de variables exponenciales independientes tiene distribución exponencial con parámetro igual a la suma de los parámetros de las variables consideradas.

MÚLTIPLE OPCIÓN: POR FAVOR, **LLENAR CON LETRAS MAYÚSCULAS**

PREGUNTA	**1**	**2**	**3**	**4**
RESPUESTA				

Parte de desarrollo (Total: 40 puntos)

(En esta parte no se penalizan los errores con puntajes negativos)

Ejercicio 1. (28 puntos) Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con densidad dada por

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

en donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido.

(a) Mostrar que $E(X^2) = \theta$.

(b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de X. Hallar $\hat{\theta} = \text{EMV}(\theta)$ el estimador de máxima verosimilitud de θ.

(c) ¿Es $\hat{\theta}$ consistente? Justificar.

(d) Mostrar que $\hat{\theta}$ es insesgado.

(e) Supongamos que se dispone de una muestra $X_1, \cdots, X_n$ con n suficientemente grande. Dar un intervalo asintótico de confianza $1 - \alpha$ para θ con $\alpha \in (0, 1)$.

Ejercicio 2. (12 puntos)
La siguiente tabla contiene una muestra de tamaño $n = 10$, de una variable X que tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ desconocido.

1.97	0.95	2.97	0.23	1.33	1.29	2.70	0.49	0.24	0.11

(a) Realizar **dos** pruebas de hipótesis para determinar si la muestra es i.i.d..

(b) Realizar **una** prueba de hipótesis para determinar si la muestra se ajusta a una distribución exponencial.

(c) Sabiendo que para una muestra de tamaño 100 de dicha distribución, exactamente 40 de los valores son mayores a 1, estimar el parámetro λ.

Nota: Trabajar en todas las pruebas al nivel $\alpha = 0,05$.

NO LLENAR. PARA USO DOCENTE

PREGUNTA	1	2	3	4	1.a.	1.b.	1.c.	1.d.	1.e.	2.a.	2.b.	2.c.	TOTAL
PUNTAJE													

Cod. 354