Segundo Parcial - Probabilidad y Estadística

Lunes 7 de julio del 2014

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4

Los problemas de desarrollo valen 20 puntos cada uno. Cada respuesta de pregunta múltiple opción correcta vale 5 puntos, mientras que una respuesta equivocada resta 1 punto. Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema 1

Sea $X_1, \ldots, X_n \, iid \sim P(\lambda)$, con n muy grande y $\lambda > 0$.

a) Mostrar que la distribución de $\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$ se puede aproximar por una normal estándar.

b) Mostrar que la distribución de $\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}}\right)$ se puede aproximar por una normal estándar.

c) Mostrar que $I = [\overline{X_n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}, \overline{X_n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}]$ es un Intervalo de Confianza aproximado de nivel $1-\alpha$ para λ.

d) Si $n = 10.000$, $\overline{X_n} = 50$ y $\alpha = 0,05$ (se recuerda que $z_{0,025} = 1,96$). ¿Considera razonable suponer que $\lambda \leq 40$? Justifique su respuesta.

Problema 2

Las pruebas de hipótesis realizadas en este Problema serán utilizando $\alpha = 0,1$.
Se considera la muestra: 0.162, 0.008, 1.272, 0.125, 0.666, 0.128, 0.102, 0.091.

a) Investigar si hay suficiente evidencia para considerar los datos como no aleatorios. Aplicar dos test de aleatoriedad.

b) Investigar si es posible considerar la muestra proveniente de una distribución exponencial.

c) Sabiendo que $sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - 1 + e^{-5x}| = 0.24$, investigar si es posible considerar la muestra proveniente de una distribución exponencial con $\lambda = 5$.

d) ¿Cómo se pueden explicar los resultados obtenidos?

Múltiple Opción 1

Se dispone de muestras $X_1, \ldots, X_n \, i.i.d. \sim Exp(\lambda)$, y se considera la prueba de hipótesis simple:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 2 \\ H_1 : \lambda = 4 \end{cases}$$

con región crítica $\mathcal{R} = \{\min\{X_1, \ldots, X_n\} < k_\alpha\}$, siendo k_α tal que el error tipo I vale α. Sea π la potencia de esta prueba. Entonces:

A): $k_\alpha = -\frac{ln(\alpha)}{2n}$ y $\pi = \alpha(1-\alpha)$.
B): $k_\alpha = -\frac{ln(1-\alpha)}{2n}$ y $\pi = \alpha(2-\alpha)$.
C): $k_\alpha = \frac{ln(1-\alpha)}{4n}$ y $\pi = \alpha(2-\alpha)$.
D): $k_\alpha = \frac{ln(1-\alpha)}{4n}$ y $\pi = \alpha(1-\alpha)$.
E): $k_\alpha = -\frac{ln(\alpha)}{n}$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 2

Se tiene una muestra $X_1, \ldots, X_n \, iid \sim U[0, \theta]$, donde el parámetro $\theta > 0$ es desconocido y se desea estimar. Se propone el estimador $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ para θ.
Una condición necesaria y suficiente para que $\hat{\theta}$ sea insesgado para θ es:

A): $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
B): $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2$.
C): $\alpha_i = 1/n$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
D): $\alpha_i = 1$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
E): El estimador $\hat{\theta}$ presenta sesgo bajo cualquier elección de los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 3

Se considera la muestra $X_1, \ldots, X_n \, i.i.d. \sim C(\mu, \sigma^2)$. Los cuartiles 1/4, 2/4 y 3/4 se definen como las abscisas $q_{1/4}$, $q_{2/4}$ y $q_{3/4}$ tales que $F_X(q_{1/4}) = 1/4$, $F_X(q_{2/4}) = 2/4$ y $F_X(q_{3/4}) = 3/4$. Para estimar los parámetros μ y σ se consideran el promedio muestral $\overline{X}_n$, el estimador s_n^2 y tres estimadores $\hat{q}_{1/4}$, $\hat{q}_{2/4}$ y $\hat{q}_{3/4}$ consistentes para $q_{1/4}$, $q_{2/4}$ y $q_{3/4}$ respectivamente. Entonces:

A): $\overline{X}_n$ es estimador insesgado para μ.
B): $\overline{X}_n$ y s_n^2 son estimadores consistentes para μ y σ^2.
C): $\hat{q}_{2/4}$ y $\hat{q}_{3/4} - \hat{q}_{1/4}$ son estimadores consistentes para μ y σ respectivamente.
D): $\hat{q}_{2/4}$ y $2(\hat{q}_{3/4} - \hat{q}_{1/4})$ son estimadores consistentes para μ y σ respectivamente.
E): $\hat{q}_{2/4}$ y $(\hat{q}_{3/4} - \hat{q}_{1/4})/2$ son estimadores consistentes para μ y σ respectivamente.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Múltiple Opción 4

Para determinar la resistencia de un artefacto electrónico a sobretensiones se somete a un ensayo una muestra de estos artefactos elegidos al azar. Sea p la probabilidad de que un artefacto no resista el ensayo (que fallan de forma independiente). Llamamos p^* al estimador usual de p, es decir, la proporción de fallas observada en la muestra. Se determina que $[0,0432; 0,3568]$ es un intervalo de confianza centrado en p^* al 95% para p. Entonces, el tamaño de la muestra con la que se halló el intervalo fue:

A): 20.
B): 25.
C): 30.
D): 35.
E): 40.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Sugerencia: calcule primero el valor de p^*.