Segundo Parcial - Probabilidad y Estadística

Julio del 2014

MO1	MO2	MO3	MO4
B	B	E	B

Cada pregunta múltiple opción correcta vale 5 puntos, mientras que una respuesta equivocada resta 1 punto. Los problemas de desarrollo valen 20 puntos cada uno.
En toda la prueba se utilizará error Tipo I de $\alpha = 0{,}05$.

Problema 1

a) En una variable de Poisson tenemos que $E(X) = Var(X) = \mu$. Como la muestra es iid y n es muy grande, por el Teorema Central del Límite, tenemos en este caso que la distribución de $\sqrt{n}\frac{(\overline{X_n}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ se aproxima bien por la distribución normal estándar.

b) Como $\overline{X_n} \xrightarrow{c.s.} \lambda$ y $g(x) = \sqrt{x}$ es continua, $\sqrt{\overline{X_n}} = g(\overline{X_n}) \xrightarrow{c.s.} g(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ y por sustitución se consigue el resultado.

c)

$$\begin{aligned} P(\lambda \in I) &= P(\overline{X_n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\overline{X_n}}}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq \overline{X_n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\overline{X_n}}}{\sqrt{n}}) \\ &= P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \lambda\right)}{\sqrt{\overline{X_n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

d) El IdeC para λ a nivel $0,95$ es $I = \left[50 - 1{,}96\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10{,}000}}, 50 + 1{,}96\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10000}}\right] \simeq [49{,}86, 50, 14]$.
Por lo tanto, con una probabilidad de $0,95$ podemos afirmar que no es cierto que $\lambda \leq 40$.
Se toma válido también el uso del test de hipótesis con $H_0 : \lambda \leq 40$ y $H_1 : \lambda > 40$.

Problema 2

a) Tras aplicar el Test de Rachas de subidas y bajadas resulta $R = 5$ y $n = 8$. El p-valor para esta muestra es $\alpha^* = 0{,}6876 > 0{,}1$, por lo que no se rechaza la hipótesis de aleatoriedad. Al aplicar el Test de correlación de rangos de Spearman se obtiene $r_S = -0{,}286$, por lo que p-valor es $\alpha^* = 0{,}291 > 0,1$, y este test tampoco rechaza la hipótesis de aleatoriedad. Supondremos a continuación que los datos son aleatorios.

b) Aplicando el test de Lilliefors se estima λ con $\hat{\lambda} = 3,13$, y se obtiene el estadístico $L = 0,352$. Con $n = 8$ el p-valor es $\alpha^* > 0,1$.
Por lo tanto, se rechaza que la muestra provenga de una variable exponencial.

c) Aplicando el test de K-S con $D_n = 0,24$, se tiene que el p-valor es $\alpha^* > 0,2$.
Por lo tanto, no se rechaza que la muestra provenga de una ley exponencial con $\lambda = 5$.

d) Lilliefors rechaza que la muestra responda a una ley exponencial, mientras que el test de Kolmogorov-Smirnov no rechaza que la muestra responda a una ley exponencial con $\lambda = 5$. Puesto que el tamaño de muestra es reducido, la estimación proveniente de la ley fuerte, $\hat{\lambda} = 1/\overline{X_n} = 3,13$, no es satisfactoria.

Múltiple Opción 1

$\alpha = P_{H_0}(\text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} < k_\alpha) = 1 - e^{-2nk_\alpha}$, y despejando se obtiene que $k_\alpha = -\frac{ln(1-\alpha)}{2n}$. El error tipo II vale $\beta = P_{H_1}(\text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} > k_\alpha) = e^{-4nk_\alpha} = (1-\alpha)^2$, por lo que la potencia del test es $\pi = 1 - \beta = 1 - (1-\alpha)^2 = \alpha(2-\alpha)$.
La opción correcta es la B.

Múltiple Opción 2

$E(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{2}\alpha_i = \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Luego, $\hat{\theta}$ es insesgado para θ si y solo si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2$, por lo que la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 3

La variable de Cauchy no tiene esperanza, por lo que la opción B es falsa. Además, $F^{-1}(q) = \mu + \sigma \tan\left[\pi\left(q - \frac{1}{2}\right)\right]$, y evaluando obtenemos que $q_{1/4} = \mu - \sigma, q_{2/4} = \mu$ y $q_{3/4} = \mu + \sigma$.
Luego, $q_{3/4} - q_{1/4} = 2\sigma$ y la opción E es correcta.

Múltiple Opción 4

El intervalo de confianza aproximado para una variable Bernoulli de parámetro p centrado en p^* tiene radio $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ siendo $\hat{\sigma} = \sqrt{p^*(1-p^*)}$ Como $I = [0{,}0432, 0{,}3568]$, su valor central es $p^* = 0{,}2$. Utilizando el radio tenemos que $n = \left(\frac{2\times 1{,}96}{0{,}3136} \times 0{,}4\right)^2 = 25$ y la opción correcta es la B.